DEVOIR SURVEILLÉ TRONC COMMUN 3ème année MATHÉMATIQUES

Durée : 2h

DOCUMENTS, PORTABLES ET CALCULATRICES INTERDITS

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Les questions 6., 7. sont plus délicates.

Intégration et transformée de Fourier

1. On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I. Alors

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}\right) \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) \in L^2([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}}\right) \in L^2([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$

2. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+2xy+3y^2)}\,dx\,dy$ est égale à

☐ π ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{3}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x(1+y^2)}\,dx\,dy$ est égale à

☐ π ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ ☐ $2\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2$ ☐ $\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

4. La transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction $f(x) := x\,e^{-\pi x^2}$, est égale à

☐ f ☐ $-f$ ☐ if ☐ $-if$ ☐ $2f$ ☐ $-2f$

5. La transformée de Fourier de la fonction $\left(x \mapsto -4\pi^2x^2\, 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\right)$ en $\xi = 1$, est égale à

☐ $-\pi$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ π ☐ 2π

6. Soit la fonction $f : \left(x \mapsto \begin{cases} x^2\,e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}\right)$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ est égale à

☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{d\xi}{(1+\xi^2)^3}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{d\xi}{(1+\xi^2)^4}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{d\xi}{(1+\xi^2)^5}$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{d\xi}{(1+\xi^2)^6}$

7. Soit la fonction $f_a(x) := \dfrac{1}{x^2+a^2}$, $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. La convolée $f_1 * f_1$ coïncide, à une constante multiplicative près, avec

☐ f_1 ☐ f_2 ☐ $(f_1)^2$ ☐ $(f_2)^2$ ☐ $(\widehat{f_1})^2$ ☐ $(\widehat{f_2})^2$

Variables complexes

On définit le logarithme complexe $\mathrm{Log}\,(z)$ sur $\mathbb{C}$ privé de l'axe des réels négatifs (pour tout $z \in \mathbb{C} - \{x, x \in \mathbb{R}^-\})$ et l'argument de z est pris dans $]-\pi, \pi[$.

8. La fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}\,(z)}{z-1}$

- ☐ n'est holomorphe nulle part
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ a une singularité éliminable en $z = 1$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$
- ☐ a un pôle d'ordre 1 en $z = 1$.

9. Pour la fonction f définie à la question 8 :

- ☐ $f(1-i)$ n'existe pas
- ☐ $f(1-i) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{i}{2}\ln 2$
- ☐ $f(1-i) = 0$
- ☐ $f(1-i) = \dfrac{i}{2}\ln 2$
- ☐ $f(1-i) = -\dfrac{7\pi}{4} + \dfrac{i}{2}\ln 2$
- ☐ $f(1-i) = \ln\sqrt{2}$.

10. Le développement en série entière au voisinage de $z = 1$ de la fonction f définie à la question 8 est :

- ☐ il n'existe pas
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1}(z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(z-1)^n}{n+1}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1}$.

11. Le résidu de $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ en $z = i$ est :

- ☐ 0
- ☐ $\dfrac{3i}{8}$
- ☐ $\dfrac{3\pi}{8}$
- ☐ $-\dfrac{3}{16}$
- ☐ $-\dfrac{3i}{16}$
- ☐ il n'existe pas.

12. Combien vaut $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{10 + 8\sin\theta}$?

- ☐ 0
- ☐ $+\infty$
- ☐ $\dfrac{2\pi}{3}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{3}$
- ☐ $\dfrac{4\pi}{3}$
- ☐ $\dfrac{\pi i}{3}$
- ☐ $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Correction du DS de janvier 2012
Tronc Commun 3ème année – Mathématiques

1. Deux réponses correctes : $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ et $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^4+x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$.

2. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

3. Deux réponses correctes : $\dfrac{\pi}{2} = 2\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2$.

4. $\hat{f} = -if$.

5. 2.

6. $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3}$.

7. f_2.

8. La fonction Log définie dans l'énoncé est holomorphe sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ et $z \mapsto z-1$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule en $z=1$. Donc la fonction f est au moins holomorphe sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ privé de 1. Mais $\mathrm{Log}(z)/(z-1) \to 1$ quand $z \to 1$ donc 1 *est une singularité éliminable de* f et f *est holomorphe sur* $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ (2 cases à cocher).

9. Simple calcul : $f(1-i) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\ln 2$.

10. $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(1+z-1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}$ d'où, en divisant par $z-1$ et en faisant un changement d'indice, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(z-1)^n}{n+1}$ (avec un rayon de convergence égal à 1).

11. Le calcul a été fait en cours, on trouve $-3i/16$.

12. C'est une intégrale de type 1 (cf. cours) qui vaut $\pi/3$. Pour la calculer on introduit

$$f(z) = \frac{1}{10+8\frac{z-z^{-1}}{2i}}\,\frac{1}{iz} = \frac{1}{2(5iz+2z^2-2)} = \frac{1}{4(z+i/2)(z+2i)}$$

qui est holomorphe sur $\mathbb{C}-\{-i/2,-2i\}$ avec des pôles d'ordre 1 en $z=-i/2$ et $z=-2i$. Il suit

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{10+8\sin\theta} = \int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f,-i/2) = \frac{\pi}{3}.$$