DEVOIR SURVEILLÉ TRONC COMMUN 3ème année MATHÉMATIQUES

Durée : 2h

DOCUMENTS, APPAREILS ÉLECTRONIQUES (PORTABLES, CALCULATRICES, ETC...) INTERDITS

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

La question 7 est plus délicate.

Intégration et transformée de Fourier

1. On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I. Alors

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}\right) \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) \in L^2([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}\right) \in L^2([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$

2. Par un changement de variables, l'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ est égale à

☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ π

3. Soient $I := \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+n)^2}$ et $J := \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+n)^2}$. Alors

☐ $I = +\infty$ ☐ $I = \pi$ ☐ $I = 0$ ☐ $J = 0$ ☐ $J = \dfrac{\pi}{2}$ ☐ $J = \pi$

4. La transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction $f(x) := x^2\, e^{-\pi x^2}$, vérifie

☐ $\hat{f} = 1+f$ ☐ $\hat{f}$ réelle ☐ $\hat{f} = if$ ☐ $\hat{f} > 1+f$ ☐ $\hat{f} > -f$ ☐ $\hat{f} < -f$

5. Soit $f : \left(x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right)$. Par Plancherel, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} 4\pi \big(f(x)\big)^2\, dx$ est égale à

☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ ☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)^2 dt$ ☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t\cos t - \sin t}{t}\right)^2 dt$ ☐ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\right)^2 dt$

6. Soit $f_a : \left(x \mapsto \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}\right)$, $a > 0$. En partant de la transformée de Fourier de $f_a * f_a$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+4\pi^2 t^2)^2}$ est égale à

☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\, e^{-2ax}\, dx$

☐ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\, e^{-2ax}\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^4\, e^{-2ax}\, dx$

7. Sachant que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\, dx$ est égale à

☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ $\sqrt{2\pi}$ ☐ $2\sqrt{\pi}$

Variables complexes

8. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)^2}$

- ☐ n'est holomorphe nulle part
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{3\}$
- ☐ a une singularité éliminable
- ☐ a une singularité essentielle
- ☐ a un pôle d'ordre 1
- ☐ a un pôle d'ordre 2.

9. Le développement en série entière au voisinage de $z = i$ de la fonction f (de la question 8) est :

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(3+i)^{n+2}} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(3+i)^{n+2}} (z-i)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(3+i)^{n+2}} (z-i)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(3+i)^{n+2}} (z-i)^n$
- ☐ il n'existe pas

10. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 9 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ 3 ☐ $\sqrt{10}$ ☐ $\sqrt{11}$ ☐ $+\infty$.

11. Le résidu $\text{Rés}(f, -3)$ de f (définie dans la question 8) en $z = -3$ est :

☐ il n'existe pas ☐ 1 ☐ $2\pi i$ ☐ $\dfrac{-2}{(3+i)^3}$ ☐ $\dfrac{2}{(3+i)^3}$ ☐ 0.

12. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} dx$?

☐ 0 ☐ $\dfrac{\sin 1}{2e} - i\dfrac{\cos 1}{2e}$ ☐ $\dfrac{\pi \cos 1}{e} + i\dfrac{\pi \sin 1}{e}$ ☐ π ☐ n'est pas définie.

Correction du DS de janvier 2013
Tronc Commun 3ème année – Mathématiques

1. Deux réponses correctes : $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ et $\left(x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$.

2. π en faisant un changement de variables en coordonnées polaires.

3. Deux réponses correctes : $I = \pi$ (bosse glissante) et $J = 0$ (convergence dominée).

4. Deux réponses correctes : $\hat{f}$ réelle et $\hat{f} > -f$.

5. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\right)^2$.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\, e^{-2ax}\, dx$.

7. $2\sqrt{\pi}$.

8. La fonction f est une fraction rationnelle avec un unique pôle en $z = -3$ qui est d'ordre 2. En particulier f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$. Il y avait donc 2 cases à cocher.

9. On peut par exemple développer en série entière $g(z) = (z+3)^{-1}$ au voisinage de i et dériver ensuite.
On obtient $\displaystyle\frac{1}{(z+3)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(3+i)^{n+2}}(z-i)^n$ pour z proche de i.

10. $R = \sqrt{10}$ (se voit sur le développement ci-dessus ou géométriquement en calculant la distance de i au pôle -3).

11. $\text{Rés}(f,-3) = 0$. Ce résidu est le terme a_1 du développement en série entière $\sum a_n(z+3)^n$ au voisinage de -3 de la fonction $(z+3)^2 f(z)$. Cette fonction étant identiquement égale à 1, elle est déjà développée en série entière avec $a_0 = 1$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.

12. L'intégrale $\mathcal{J}$ demandée est de type 2 (cf. cours). On pose $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} = \dfrac{e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$.
On a donc $\mathcal{J} = 2\pi i\, \text{Rés}(f, 1+i) = \dfrac{\pi \cos 1}{e} + i\dfrac{\pi \sin 1}{e}$.