DEVOIR SURVEILLÉ TRONC COMMUN 3ème année MATHÉMATIQUES

Durée : 2h

DOCUMENTS, APPAREILS ÉLECTRONIQUES (PORTABLES, CALCULATRICES, ETC...) INTERDITS

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

La question 7 est plus délicate.

Intégration et transformée de Fourier

1. On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I. Alors

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x}\right) \in L^1([0,1[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x}\right) \in L^2([0,1[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right) \in L^2([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \in L^2(\mathbb{R})$

2. Soit $f(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,(1+x)}}{1+x}\,dx$, $t > 0$. Alors $f'(1)$ est égale à

☐ $-e^2$ ☐ $-e$ ☐ $-\dfrac{1}{e}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{e}$ ☐ e ☐ e^2

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ est égale à

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ π ☐ 2π

4. La transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction $f(x) := x\,e^{-\pi x^2}$, vérifie

☐ $\hat{f}(0) = 0$ ☐ $\hat{f}(0) = \sqrt{\pi}$ ☐ $\hat{f} = -f$ ☐ $\hat{f} = f$ ☐ $\hat{f} = -\,i f$ ☐ $\hat{f} = i f$

5. À l'aide du théorème de Plancherel, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi x\,(x+iy)}\,dx \right|^2 dy$ est égale à

☐ $\dfrac{1}{4}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\sqrt{\pi}$

6. Soit $f(x) := \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, $x \neq 0$. Alors, $\mathscr{F}$ désignant la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, $f * f$ est égale à

☐ f^2 ☐ f ☐ $\mathscr{F}(f)$ ☐ $\big(\mathscr{F}(f)\big)^2$ ☐ $\mathscr{F}(f^2)$ ☐ $\mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(f)$

7. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+y)} - e^{-2(x+y)}}{x+y}\,dx\,dy$ est égale à

☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{\ln 2}{2}$ ☐ $\ln 2$ ☐ 1 ☐ $2\,\ln 2$ ☐ $1 + \ln 2$

Variable complexe

Dans les questions **8**, **9**, **10** et **11**, on considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{6+z-z^2}$.

8. La fonction f

- ☐ n'est holomorphe nulle part
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-2, 3\}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-3, 2\}$
- ☐ a deux pôles
- ☐ a deux singularités essentielles

9. Soit $C(0,1)^+$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique. L'intégrale $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz$ vaut

☐ elle n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{5}$ ☐ $-\dfrac{1}{5}$ ☐ $\dfrac{2\pi i}{5}$ ☐ $-\dfrac{2\pi i}{5}$ ☐ $2\pi i$

10. Le développement en série entière de f en 0 est

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^{n}} + \frac{(-1)^n}{2^{n}}\right) z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z+2)^n$
- ☐ il n'existe pas

11. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 10 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ 3 ☐ $+\infty$.

12. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$?

☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{8}$ ☐ $-\dfrac{3\pi}{8}$ ☐ $\dfrac{3\pi}{8}$ ☐ $\dfrac{3\pi}{4}$ ☐ $\dfrac{3i}{16}$ ☐ $-\dfrac{3i}{16}$ ☐ $+\infty$

Correction du DS de janvier 2014
Tronc Commun 3ème année – Mathématiques

1. 2 réponses : $\left(x \mapsto \dfrac{1-e^{-\sqrt{x}}}{x}\right) \in L^1([0,1[)$ et $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \in L^2(\mathbb{R})$.

2. $-\dfrac{1}{e}$.

3. 2π.

4. 2 réponses : $\hat{f}(0) = 0$ et $\hat{f} = -if$.

5. On reconnaît dans le module la transformée de Fourier de $\left(x \mapsto e^{-2\pi x^2}\right)$, d'où par Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi x\,(x+iy)}\,dx \right|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi x^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

6. D'après le cours $\mathscr{F}(f) = 1_{[-1/2,1/2]}$ d'où $f * f = f$.

7. Un calcul très similaire a été fait en cours. On part de

$$\frac{e^{-(x+y)} - e^{-2(x+y)}}{x+y} = \int_1^2 e^{-z(x+y)}\,dz,$$

puis on obtient en appliquant Fubini-Tonelli la valeur $\dfrac{1}{2}$.

8. La fonction f est une fraction rationnelle qui se factorise sous la forme $f(z) = \dfrac{-1}{(z-3)(z+2)}$. La fonction est donc holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-2, 3\}$ et les points $-2, 3$ sont tous deux des pôles d'ordre 1. Il y avait donc 2 cases à cocher.

9. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-2, 3\}$ et que le disque fermé $\overline{D}(0,1)$ est un compact à bord inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{-2, 3\}$, par le théorème de Cauchy, $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0$.

10. On décompose la fraction rationnelle f en éléments simples et on écrit la décomposition sous la forme $f(z) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-z/3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+z/2}\right)$.
On obtient alors facilement le développement en série entière de f au point 0, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n$.

11. $R = 2$. On peut le voir sur le développement ci-dessus ou géométriquement en calculant la distance de 0 au pôle le plus proche, c'est-à-dire -2.

12. L'intégrale a été calculée en cours : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi i \text{ rés}\left(\frac{1}{(1+z^2)^3}, i\right) = \frac{3\pi}{8}$ car $\text{rés}\left(\dfrac{1}{(1+z^2)^3}, i\right) = -\dfrac{3i}{16}$.