NOM Prénom + code barre

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2014-2015
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Jeudi 15 janvier 2015 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits
Le sujet comporte 4 pages. Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1. *Les 4 questions sont indépendantes. Il peut y avoir plusieurs cases à cocher à chaque question. Toute case cochée à tort sera comptée négativement.*

1.1 Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

☐ f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ☐ f est continue en $(0,0)$

☐ f n'est continue nulle part.

1.2 On considère l'EDP $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 quelconque.

☐ $f(x,y) = g(\arctan(\frac{y}{x}))$ est solution de l'EDP

☐ $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ est solution de l'EDP

☐ l'EDP n'a pas de solution

1.3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\varphi(t) = f(\cos(t), 2t)$.

☐ $\varphi'(0)$ n'existe pas ☐ $\varphi'(0) = 0$

☐ $\varphi'(0) = 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ ☐ $\varphi'(0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$

1.4 Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$.

☐ f a un maximum local en $(0,0)$.

☐ f a un minimum local en $(0,0)$.

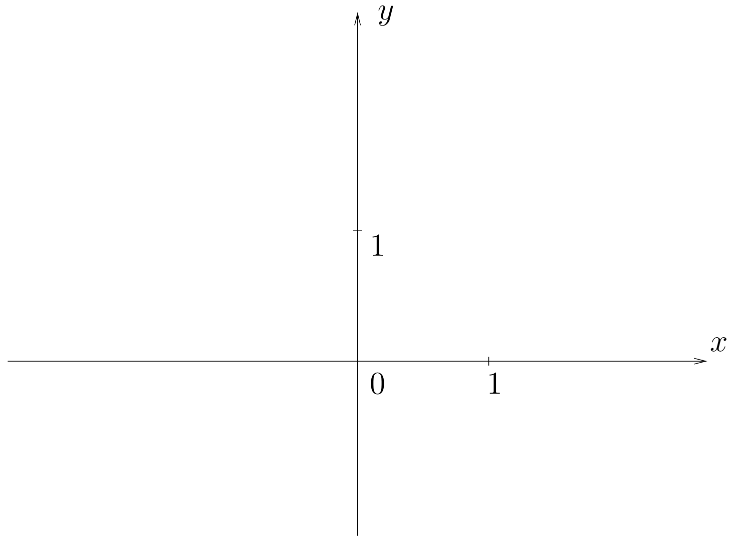
☐ f a un point selle en $(0,0)$.

Tournez svp

Exercice 2. Soit $h(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2y - 1$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$. Montrer qu'il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 1$ et, au voisinage de $(0,1)$, $h(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.*

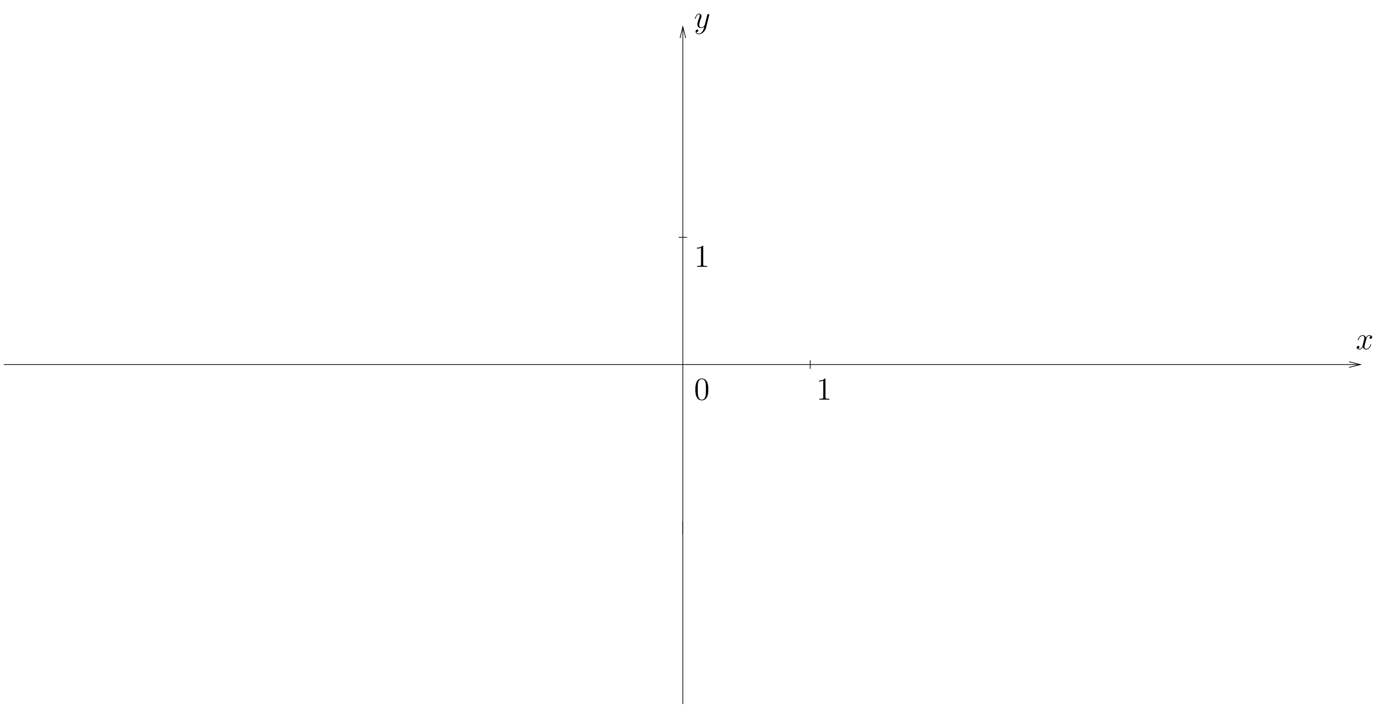
Déterminer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de φ.

Dessiner l'allure de Γ au voisinage du point $(0, 1)$.



Exercice 3.
On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = y + \sqrt{3}\,x$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

3.1. Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f et g sur le même dessin.



3.2. Calculer dans $\overline{\mathbb{R}}$: $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \boxed{}$ $\quad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \boxed{}$

$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x, y) = \boxed{}$ $\quad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x, y) = \boxed{}$

On considère les problèmes

(I) Minimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

(S) Maximiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

3.3. Représenter graphiquement les solutions de **(I)** et **(S)** sur le dessin de la question 3.1.

3.4. Résoudre les problèmes **(I)** et **(S)** à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

FIN