NOM Prénom + code barre

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2015-2016
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Jeudi 14 janvier 2016 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.

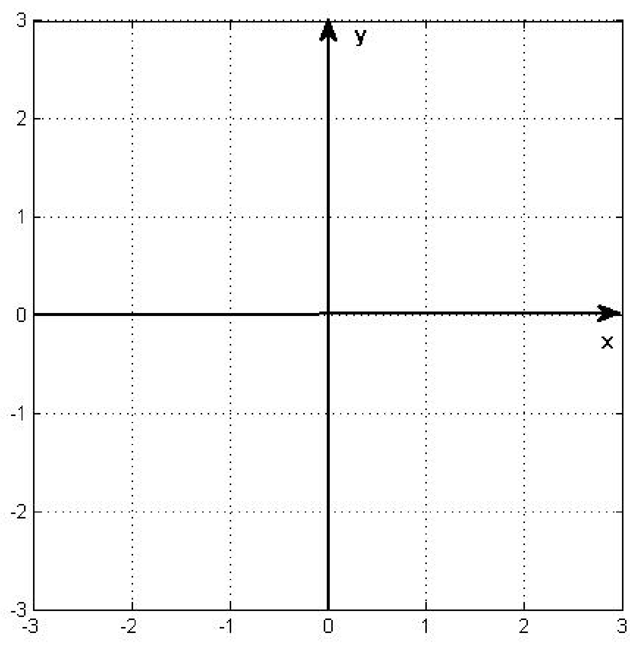
Exercice 1. Soit φ la fonction définie par $\varphi(t) = f(\cos(t), \sin(t))$ où f est une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]^2$. Calculer $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ en fonction des dérivées partielles de f et donner le développement limité à l'ordre 2 de $\varphi(t)$ en 0 en fonction de f et ses dérivées partielles en $(1, 0)$. *Écrire uniquement les résultats sans les calculs.*

$\varphi'(t) \;=$

$\varphi''(t) \;=$

$\varphi(t) \;=$

Exercice 2. Soit $h(x, y) = \ln(1 - xy)$. Sur le graphe ci-dessous indiquer le domaine de définition D_h en hachurant $\mathbb{R}^2 \setminus D_h$, la zone hors du domaine, puis dessiner les deux courbes de niveau $h(x, y) = \ln(2)$, courbe tracée '- -' et $h(x, y) = -\ln(2)$, courbe '-+-'.



Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On effectue le changement de variables $u = 2x+y$, $v = 2x - y$ de sorte que $f(x,y) = F(u,v)$. Déterminer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de F.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

En déduire les solutions C^1 de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8x - 4y$ sur $\mathbb{R}^2$.

Déterminer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celles de F.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$$

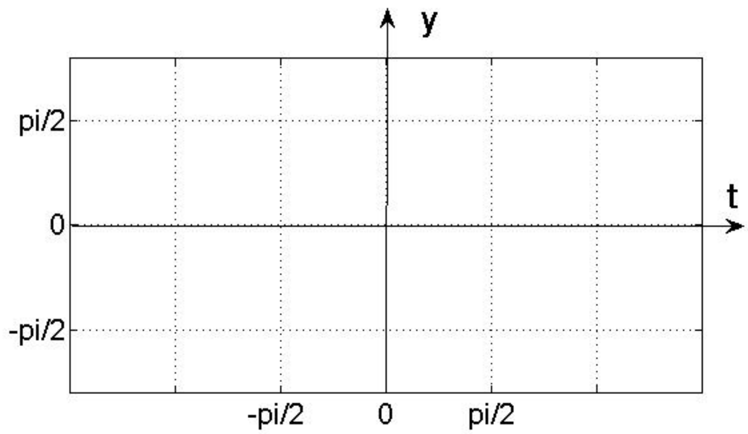
En déduire les solutions C^2 de l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $h(x, y) = xe^y + ye^x$ et $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$. Montrer qu'il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et, au voisinage de $(0, 0)$, $h(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.*

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π périodique telle que $f(t) = t - \pi/2$ pour $t \in [0, \pi]$.

Dessiner le graphe de f.



Donner les coefficients de Fourier, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$a_{2p} =$, $a_{2p+1} =$, $b_n =$

Déterminer $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\sigma_2 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$. *Rappeler les hypothèses et conclusions des théorèmes utilisés et ne pas détailler les calculs.*