NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2016-2017
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mardi 17 janvier 2017 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.

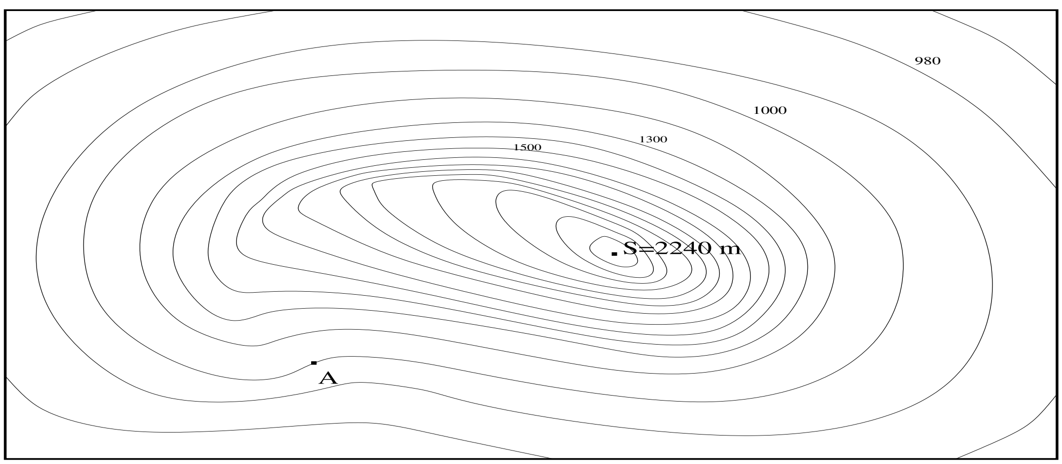
Exercice 1. Soit $\psi(t) = f(3t, t^2 + 1)$ où f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\psi'(t)$ et $\psi''(t)$ en fonction des dérivées partielles de f et donner le développement limité à l'ordre 2 de $\psi(t)$ en 0 en fonction de f et ses dérivées partielles en $(0, 1)$. *Écrire uniquement les résultats.*

$\psi'(t) =$

$\psi''(t) =$

$\psi(t) =$

Exercice 2. Dessiner sur la carte le chemin suivant la ligne de plus grande pente pour aller du point A au sommet S.



Équation du plan tangent au relief au point S : $z =$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} + y & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Justifier que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Démontrer que f est continue en $(0,0)$.

Calculer *(ne donner que les résultats)*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

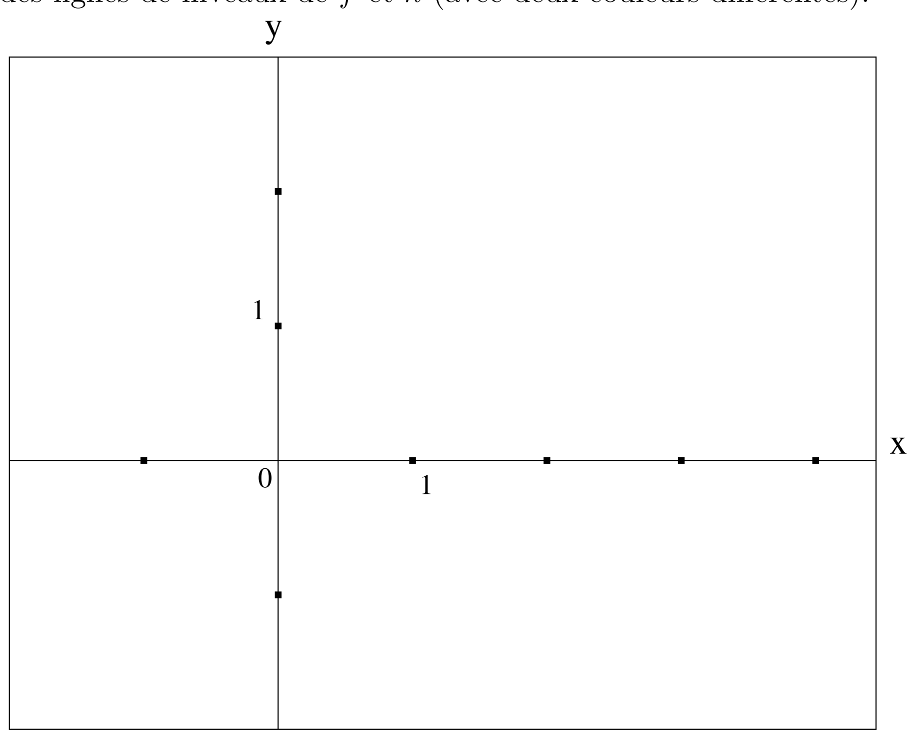
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ? *(justifier)*

Exercice 4. Soit $h(x,y) = \sin y + y + e^x - 1$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$. Montrer qu'il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et, au voisinage de $(0,0)$, $h(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.*

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

Exercice 5. Extrema de $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $h(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.
Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f et h (avec deux couleurs différentes).



Lagrangien du problème : $\mathcal{L}(x, y, \lambda) =$

Système des conditions nécessaires d'optimalité :

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} =$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} =$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} =$

Trouver les 4 solutions (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$ du système et les représenter sur le dessin.
[Indications : trouver une solution évidente pour $\lambda = 0$. Ensuite soustraire les 2 premières équations et distinguer les cas $x = y$ et $x \neq y$.]

$\max \{f(x, y)$ sous la contrainte $h(x, y) = 0\} =$

$\min \{f(x, y)$ sous la contrainte $h(x, y) = 0\} =$