ne rien écrire

Exo1 : Exo2 :

Exo3 : Exo4 :

NOM Prénom + code barre

2ème année STPI 2022-2023

DEVOIR SURVEILLÉ D'ANALYSE 3 ;

Vendredi 13 janvier 2023 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits

Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement en n'utilisant que la place prévue.

Exercice 1. Soit f une fonction 2π-périodique, définie par : $\forall t \in]-\pi, \pi]$, $f(t) = \sin(t/2)$.

1.1. Justifer l'existence du développement en série de Fourier associé à f et déterminer la relation qui existe entre la fonction f et sa série de Fourier qu'on notera $S(f)(t)$.

1.2. Déterminer les coefficients de Fourier a_n pour $n \geq 0$ et b_n pour $n > 0$ et la série de Fourier $S(f)(t)$.

$a_n =$ Formule :

$b_n =$ Formule :

$S(f)(t) =$

1.3. En déduire la valeur suivante (*pas de calculs mais indiquer la méthode utilisée*)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3} =$$ Méthode :

Exercice 2. **2.1.** Déterminer, puis représenter dans le le premier repère de Figure 1, le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ et les lignes de niveau $L_c(h)$, pour $c = 0$, et $c = 1$, de la fonction h définie par : $h(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$.

2.2. Déterminer, puis représenter dans le deuxième repère de Figure 1, le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par : $f(x, y) = \dfrac{\ln(y + x)}{\sqrt{x^2 - y}}$.

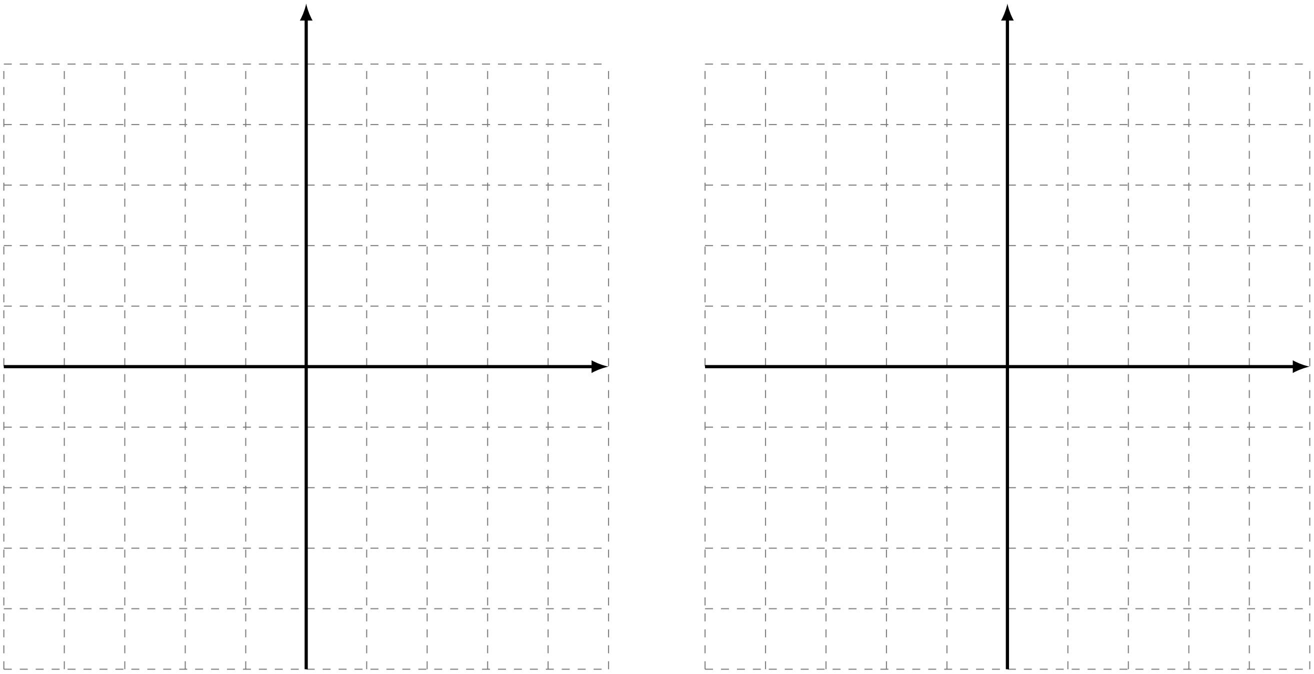

FIGURE 1

2.3. Calculer le gradient de la fonction f en tout point (x_0, y_0) de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et donner l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =$ $\boxed{}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =$ $\boxed{}$

L'équation du plan tangent est : $\boxed{}$

2.4. Résoudre pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 - y^2$ à l'aide du changement de variable $(u, v) = (x+y, x-y)$, la fonction inconnue g étant de classe C^2.

Exercice 3. 3.1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = xy(x + y - 1)$.
Déterminer sur $\mathbb{R}^2$ les points critiques de h et discuter leur nature (extremum local, point selle, etc).

3.2. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{5}$. Déterminer, à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, les solutions du problème : **(I)** Minimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Exercice 4. Soit $h(x,y) = ye^x + e^y sin(3x)$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$.
a) Démontrer qu'il existe une fonction ψ définie au voisinage de 0 telle que, au voisinage de $(0,0)$: $(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \psi(x)$ et calculer $\psi'(0)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.*
b) **Question complémentaire** : Montrer que ψ admet un développement limité à tout ordre au voinage de $x = 0$ et calculer ce développement limité à l'ordre 2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de ψ au point $x = 0$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.