

NOM + code barre



Année universitaire 2012-2013
1ère année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mercredi 5 juin 2013 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits
Le sujet comporte 5 pages et 5 exercices, tous indépendants.

Exercice 1. Une voiture parcourt 240 km en 2 h. Démontrer qu'il y a un intervalle de temps d'1 h pendant lequel la voiture a parcouru exactement 120 km.

Exercice 2. Un pâtissier vend des gâteaux au chocolat et aux fraises. Après le week-end, il fait le compte des gâteaux vendus le samedi et le dimanche. En tout, il a vendu 62 gâteaux et a fabriqué 24 gâteaux aux fraises, tous vendus. Il se rappelle que le samedi il a vendu 35 gâteaux. On appelle x_1 le nombre de gâteaux au chocolat et x_2 le nombre gâteaux aux fraises vendus le samedi et x_3 et x_4 respectivement, le nombre de gâteaux au chocolat et aux fraises vendus le dimanche.

Système d'équations associé au problème

$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Forme échelon réduite de la matrice augmentée

$\left(\begin{array}{ccc|c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$

Matrice augmentée associée au système

$\left(\begin{array}{ccc|c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$

Système réduit

$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Ensemble des solutions dans \mathbb{R}^4 du système de départ

Le pâtissier se souvient que le dimanche, il a vendu deux fois plus de gâteaux au chocolat qu'aux fraises. Trouver le nombre de gâteaux de chaque sorte vendus chaque jour.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle inversible?

Faire la décomposition $A = LU$.

$L = \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right)$ et $U = \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right)$

Exercice 4. Un parachutiste (de masse m) saute de la nacelle d'un ballon au temps $t = 0$ d'une hauteur H . Son saut se déroule en deux étapes. Lors d'une première étape, il est en chute libre. On suppose qu'il est soumis à la force de pesanteur (on appelle g la constante de pesanteur) et à une force de frottement (opposée au mouvement) proportionnelle à la vitesse. On appelle $k > 0$ la valeur absolue de cette constante de proportionnalité. La seconde étape débute lorsque, arrivé à une altitude h ($0 < h < H$) à un instant T , il ouvre son parachute ce qui change soudainement la force de frottement : elle est maintenant proportionnelle à la vitesse mais avec une nouvelle constante K ($K > k$).

On suppose que le mouvement est uniquement vertical, le long d'un axe (Oy) , orienté vers le haut. L'altitude 0 étant l'altitude au niveau du sol. On note $y(t)$ l'altitude du parachutiste à l'instant t (et donc $y'(t)$ sa vitesse et $y''(t)$ son accélération).

4.1. 1ère étape : Donner, sans justification, l'équation du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation :} \\ y(0) = \\ y'(0) = \end{array} \right.$$

Préciser la nature de cette équation.

Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée ?

Solution $y_h(t)$ de l'équation homogène :

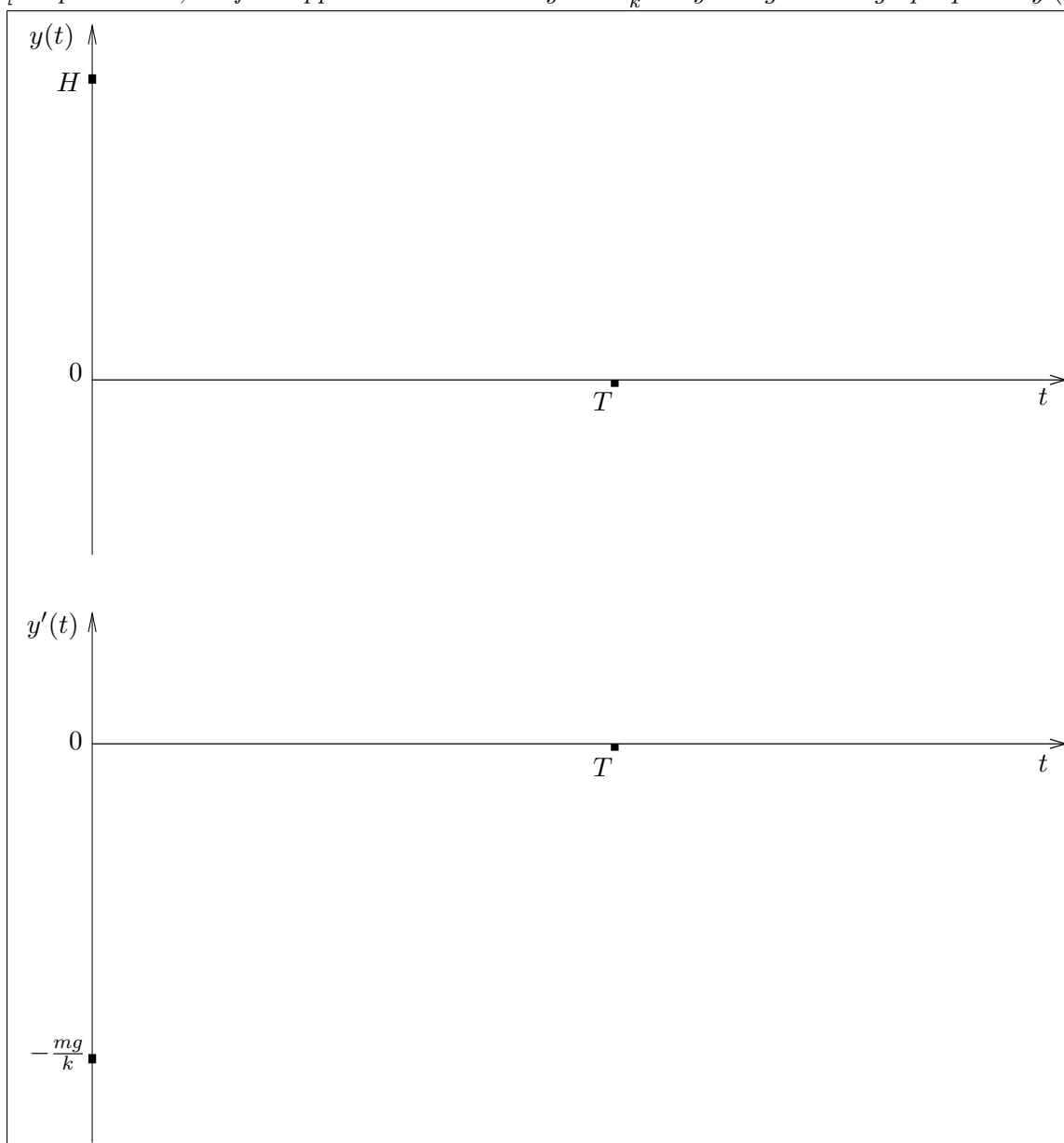
Solution particulière $y_p(t)$ de l'équation :

Solution $y(t)$ de l'équation (tenant compte des deux conditions initiales) :

Calculer $y'(t)$:

Sur le dessin ci-dessous, donner l'allure des courbes $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in [0, T]$.

[En particulier, on fera apparaître les droites $y = -\frac{mg}{k}$ et $y = -gt$ sur le graphique de $y'(t)$.]



4.2. 2ème étape : Donner la nouvelle équation du mouvement

$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation :} \\ y(T) = \\ y'(T) : \end{array} \right.$	on ne demande pas de le calculer
---	----------------------------------

Compléter le dessin précédent en donnant l'allure des courbes $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \geq T$.

[En particulier, on fera apparaître, pour $y(t)$: le point (T, h) . Pour $y'(t)$: la droite $y = -\frac{mg}{K}$.]

4.3. Dans cette question, on ne considère que la 1ère étape de chute libre. Il est plus réaliste de considérer une force de frottement proportionnelle *au carré* de la vitesse (on appelle $\gamma > 0$ la valeur absolue du coefficient de proportionnalité).

Nouvelle équation du mouvement :

Le cours permet-il de résoudre cette nouvelle équation ? (justifier brièvement)

--

Donner la nouvelle vitesse limite de chute libre

$ v_{\text{limite}} =$

Exercice 5. On fixe un nombre $A > 0$ et on considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x} - A$ pour $x > 0$.

5.1. Tracer l'allure de la fonction f sur $]0, +\infty[$

--

5.2. Appliquer la méthode de Newton pour approcher le zéro ℓ de f .

On demande de bien préciser l'intervalle sur lequel la méthode est appliquée, d'énoncer et de vérifier les hypothèses d'application et de définir précisément la suite (x_n) obtenue pour approcher ℓ .

5.3. Application : $A = 3$, $x_0 = 0, 1$. Calculer à la main

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

À partir de quel rang n peut-on être sûr que x_n soit proche de ℓ à 10^{-12} ? $n =$

5.4. Quel est l'intérêt pratique d'approcher ℓ par une telle méthode puisque, dans le cas considéré, ℓ s'exprime par une formule explicite?

———— FIN ————