NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2015-2016
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ 1 — ANALYSE 3
Vendredi 6 novembre 2015 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits.
Le sujet comporte 4 pages.

Exercice 1. Cocher les cases ou notez votre réponse. Cocher une case à tort sera pénalisé.

1.1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$ diverge ☐ converge ☐ converge absolument ☐

1.2. $\displaystyle U = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-3}{n!}$ diverge ☐ converge ☐ si elle converge, $U =$

1.3. $\displaystyle V = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)$ diverge ☐ converge ☐ si elle converge, $V =$

1.4. $\displaystyle I = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ diverge ☐ converge ☐ si elle converge, $I =$

1.5. $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverge ☐ converge ☐ converge absolument ☐

1.6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverge ☐ converge ☐ converge absolument ☐

1.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique et continue par morceaux.
Les coefficients de Fourier de f sont définis par :

$a_n =$

$b_n =$

Formule de Parseval :

Tournez svp

Exercice 2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Répondre aux questions suivantes en justifiant.

2.1. Si $a_n \to \ell \neq 0$ quand $n \to +\infty$, alors que vaut R ?

2.2. Si $a_n = \dfrac{n + 3^n}{n^2 + 2^n}$, que vaut R ?

2.3. Si $a_n = \sqrt{2^n + 1} - \sqrt{2^n}$, que vaut R ?

2.4. Si $f(x) = \dfrac{x}{5 + 2x}$, déterminer les a_n et R.

Exercice 3. Le but est de prouver la divergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2\sin^2 t}$.

3.1. Où se situent les problèmes de convergence ?

3.2. Pour $n \geq 0$, soit $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^2\sin^2 t}$. Démontrer que $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+(x+n\pi)^2\sin^2 x}$.

3.3. En déduire que $u_n \geq v_n$ avec $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+(n+1)^2\pi^2\sin^2 x}$.

3.4. En utilisant l'inégalité classique (admise) $0 \leq \sin x \leq x$ pour $x \in [0, \pi]$, en déduire que $v_n \geq w_n = \dfrac{\arctan(\pi^2(n+1))}{\pi(n+1)}$.

3.5. Trouver un équivalent de w_n. En déduire que $\sum v_n$ diverge puis conclure que I diverge.