NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2016-2017
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mercredi 9 novembre 2016 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits. Travailler avec un brouillon avant de rédiger !

Exercice 1. Nature des intégrales et séries ci-dessous. "CV" : converge, "DV" : diverge. *Cocher une case à tort sera pénalisé.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ ☐ CV ☐ DV
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-1/n}$ ☐ CV ☐ DV
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ ☐ CV ☐ DV
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2}}$ ☐ CV ☐ DV
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ ☐ CV ☐ DV
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x\ln x}dx$ ☐ CV ☐ DV

Exercice 2. Développer en série entière $\dfrac{1}{4-x}$ en précisant le rayon de convergence.

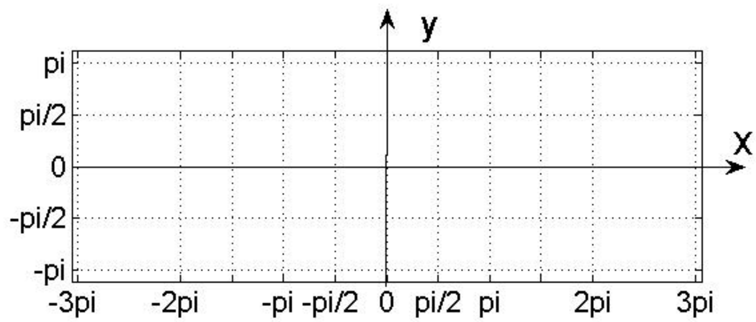
Exercice 3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx$

Exercice 4. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

Sur $]-R, R[$, calculer $f''(x) - 2xf'(x) - 3f(x)$ en fonction de $f(x)$. *Ne pas détailler les calculs car la rédaction doit tenir dans le cadre ci dessous.*

Exercice 5. Calculer $u_0 = \int_0^\pi x dx$, $u_n = \int_0^\pi x\cos(nx)dx$, $v_n = \int_0^\pi x\sin(nx)dx$ pour $n \geq 1$.

Soit f la fonction 2π périodique définie par $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad -\pi < x < 0, \\ bx & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$. Graphe de f pour $a = -1/2$ et $b = 1$



Déterminer les coefficients de Fourier de f en fonction de a, b, u_n et v_n.

Exercice 6. On considère la suite de Fibonacci $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Clairement, $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$.

Montrer que $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$ pour $n \geq 2$.

En déduire $U = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}$ et $V = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}}$. *Soyez précis dans la rédaction.*

Exercice 7. Soit (d_n) une suite d'entiers entre 0 et 9. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ converge

Ecrire alors $a := 7,77\ldots7\ldots$ sous la forme d'une série et montrer que a est rationnel.