

NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2017-2018
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mercredi 8 novembre 2017 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger!

Exercice 1. Cocher une case à tort sera pénalisé.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ converge Vrai Faux

2. Conditions nécessaires et suffisantes sur α pour que $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha}$ converge

3. $\sum \sin n$ converge Vrai Faux

4. Soit $u_n \geq 0$. Si $\sum \ln(1 + u_n)$ converge alors $\sum u_n$ converge. Vrai Faux

5. Rayon de convergence de $\sum 9^n x^n$:

$R =$

Pour $|x| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} 9^n x^n =$

6. Si $\sum (-1)^n a_n$ converge alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Vrai Faux

Exercice 2. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$. Démontrer que I est convergente.

Calculer I . On pourra faire une intégration par parties.

Exercice 3. On définit la suite (u_n) pour $n \geq 2$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$.

Soit $v_n = u_{n+1} - u_n$. Démontrer que $\sum v_n$ est convergente. On pourra faire un développement limité de v_n pour en trouver un équivalent.

Calculer les sommes partielles $\sum_{k=2}^n v_k$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma > 0$.

En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 4. Développer en série entière $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et donner son rayon de convergence.

Exercice 5. Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = \pi - |t|$ sur $] -\pi, \pi]$. La série de Fourier converge-t-elle vers f ?

Exercice 6. Les enfants et le chien de Jules attendent son retour du travail à la porte de la maison. Lorsqu'il voit apparaître son maître au bout du chemin, le chien, fou de joie, court jusqu'à lui. Arrivé à la hauteur de Jules, il fait demi-tour et retourne voir les enfants restés sur le perron puis immédiatement retourne en courant jusqu'à son maître, revient, et ainsi de suite jusqu'à ce que Jules arrive à la maison.

Quelle est la distance parcouru par le chien du moment où il aperçoit son maître à 300 m de la maison jusqu'à que ce dernier arrive à la maison, sachant que le chien court avec une vitesse de 20 km/h et que Jules marche à 5 km/h ?