ne rien écrire
Exo1 :
Exo2 :
Exo3 :
Exo4 :
Exo5 :

NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2021-2022
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3

Mercredi 3 novembre 2021 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous. On ne demande ni calculs ni justifications ici.
Cocher une case à tort sera pénalisé.

	Converge (mais pas absolument)	**Converge Absolument**	**Diverge**
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$:			
$\displaystyle\int_1^2 \ln(x-1)dx$			
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^{5/2}}dx$			
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n+2}{n^2+3n}\right)$			
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$			
$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(\sqrt{n})}$			
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{10^n}$			

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n 3^n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence	$R =$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ a pour rayon de convergence	$R =$
Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CV et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-1)^n$ DV, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence	$R =$
Valeurs de $a \in [0, +\infty[$ pour lesquelles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{3^n+n^2}$ converge	

Exercice 2. Trouver l'ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$.

[On calculera le rayon de convergence puis on étudiera la convergence de la série en $x = R$ et $x = -R$.]

Exercice 3. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2} dx$ et calculer sa valeur.

[Penser à une décomposition en éléments simples.]

Exercice 4.

4.1. Déterminer le développement en série entière de $f(x) = \dfrac{x}{(3+x)^2}$ et la rayon de convergence associé.

4.2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!}$.

4.3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{5^n}$.

Exercice 5. Soit $u_k = \dfrac{1}{k \ln^2(k)}$. Établir l'inégalité $\dfrac{1}{\ln(n)} - \dfrac{1}{\ln(N+1)} \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{N} u_k \leq \dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(N)}$ pour tous $3 \leq n \leq N$, en utilisant une comparaison série-intégrale (dont on vérifiera les hypothèses). En déduire un équivalent quand $n \to +\infty$ du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. La série $\sum u_k$ converge-t-elle ?