ne rien écrire

Exo1 :

Exo2 :

Exo3 :

NOM Prénom + code barre

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2022-2023
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Lundi 24 octobre 2022 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous. On ne demande ni calculs ni justifications ici.
CV signifie convergence et DV signifie divergence.
Cocher une case à tort sera pénalisé mais aucune pénalisation pour une valeur numérique fausse.

1.1. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux

1.2. $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $I =$ ☐

1.3. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t - 1}$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $J =$ ☐

1.4. Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt$ converge : ☐

En cas de CV : $K =$ ☐.

1.5. Valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ pour que $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\beta}$ CV (mais pas absolument) : ☐

CV absolument : ☐.

1.6. $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $S_1 =$ ☐

1.7. $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $S_2 =$ ☐

1.8. Soit $f(x) = \sum (2^n - 3^n)x^n$. Rayon de convergence $R =$ ☐,

Calcul de la somme $f(x) =$ ☐.

1.9. Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b telles que $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors : ☐ $R_a \leq R_b$ ☐ $R_a \geq R_b$ ☐ $R_a = R_b$

1.10. Chercher la solution de l'équation différentielle $(1+x)y' - \frac{1}{3}y = 0$, $y(0) = 1$, sous la forme d'une série entière

$y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Coefficients : $a_0 =$ ☐, pour $n \geq 1$, $a_n =$ ☐. Rayon de CV : $R =$ ☐

Exercice 2. On définit la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n S_n x^n$ où $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ est la somme partielle de la série harmonique. On admettra que $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$. Utiliser l'équivalent de S_n pour répondre aux 3 questions suivantes :

Redémontrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Démontrer que la série numérique $f(1)$ diverge grossièrement.

Calculer le rayon de convergence R de $f(x)$.

Calculer $(1 + x)f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 3. On peut traiter chaque question sans avoir résolu la précédente.

Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ converge.

Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(1+u^2)}$ en fonction de I au moyen du changement de variable $u = t^2$.

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt$ converge.

Par une intégration par partie, démontrer que $K_{3/2} = 4I$.

Question bonus : calculer la valeur numérique de I.

On pourra commencer par décomposer $t^4 + 1$ en produit de ses racines dans $\mathbb{C}$ puis regrouper les facteurs 2 à 2 conjugués pour obtenir une factorisation en un produit de 2 polynômes réels $P_1(t)$ et $P_2(t)$ de degré 2. Déterminer ensuite les coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de la décomposition en éléments simples $\frac{1}{t^4+1} = \frac{at+b}{P_1(t)} + \frac{ct+d}{P_2(t)}$ pour pouvoir calculer l'intégrale.