Centre de Mathématiques

Année universitaire 2012–2013
2ème année **Analyse 4**
Devoir surveillé, janvier 2013

Tous documents et appareils électroniques interdits.
Dans la copie, rendre la feuille jointe avec le graphe complété.

Exercice 1 On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en $(0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en un point $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,1,f(1,1))$.
4. Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
5. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
6. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
7. La fonction f est-elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + y^2 - 2y + 1.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Préciser s'il s'agit d'extrema locaux de f.
3. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 Soit les fonctions f et h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2, \quad h(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

et $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$.

1. Dessiner l'ensemble S sur la feuille jointe.
2. Préciser pourquoi f admet un min et un max sur S.
3. Déterminer les extrema de f sur S.
4. Pour chaque extremum de f sur S obtenu en un point (x_0,y_0), dessiner la courbe de niveau correspondante, $f(x,y) = f(x_0,y_0)$. NB: $2\cos(\pi/6) = \sqrt{3} \simeq 1.73$ et $2\sin(\pi/6) = 1$.
5. Justifier la propriété géométrique.

Nom:
Prénom :

Coller ici une étiquette identifiant