NOM Prénom + code barre

**Année universitaire 2013-2014**
**2ème année STPI**

# DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 4
## Vendredi 17 janvier 2014 — durée : 1h30

*Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits*
*Le sujet comporte 4 pages*

---

**Exercice 1.** *Cocher une case à tort sera pénalisée.*

Soit $f$ une fonction d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si $f$ est différentiable en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ alors $f$ admet des dérivées partielles suivant $x$ et $y$ en ce point. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $f$ admet des dérivées partielles suivant $x$ et $y$ en $(x_0, y_0) \in \Omega$ alors $f$ est différentiable en ce point. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Si $f$ admet des dérivées partielles suivant $x$ et $y$ au point $(x_0, y_0) \in \Omega$ alors $f$ est continue en ce point. ☐ Vrai ☐ Faux

4. Si $f$ différentiable au point $(x_0, y_0) \in \Omega$ alors $f$ est continue en ce point. ☐ Vrai ☐ Faux

5. Si $f(x,y) = \begin{cases} 2x + y & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, calculer les dérivées partielles suivantes, si elles existent.

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) =$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -1) =$

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 1) =$

   (d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 1) =$

**Tournez svp**

**Exercice 2.** Soit $\varphi(t) = f(2t+1, -t+3)$ où $f$ est une fonction de classe $C^2$ au voisinage de $A = (1, 3)$. Donner un développement limité d'ordre 2 de $\varphi$ au voisinage de 0 en fonction des dérivées partielles de $f$ en $A$.

**Exercice 3.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

**3.1.** Calculer les dérivées partielles premières en un point $(x, y)$

**3.2.** En déduire l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(0, 0, 0)$.

**3.3.** Déterminer les points critiques de $f$ et préciser s'il s'agit d'extrema locaux.

**Tournez svp**

**3.4.** Montrer qu'il existe une fonction $\varphi$ définie au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et, au voisinage de $(0, 0)$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses d'un théorème utilisé.*

**3.5.** On appelle $\Gamma$ le graphe de $\varphi$. Déterminer la limite de $y/x$ quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$ le long la courbe $\Gamma$.

**Exercice 4.** On rappelle que si $A, B, M$ sont trois points du plan alors $AB \leq AM + BM$ avec égalité si et seulement si $M$ est sur le segment $[AB]$. Déterminer la valeur du minimum global de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$.