Devoir surveillé n° 2 d'analyse 4

Année universitaire 2008-2009
2e année / STPI
Date : lundi 12 janvier 2008
Durée: 1h30 (08h30-10h00)
Nombre de pages : 4

Aucun document n'est autorisé - Les calculatrices sont interdites-Répondre dans les cadres en justifiant les réponses.

Coller l'étiquette dans ce cadre

NOM : Prénom :

GROUPE :

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x(4x^2 - y^2)$.

1) Trouver les points stationnaires de la fonction f.

2) Etudier le signe de la fonction f sur la première bissectrice $y = x$ et en déduire si f admet un extremum local ou pas en justifiant votre réponse.

Exercice 2

Pour résoudre une EDP de la forme

$$a\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}^*$, et f de classe C^2, on utilise le changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} u = x + \alpha\ y \\ v = x + \beta\ y \end{array} \right.$ où les réels α et β sont définis de la manière suivante : soit l'équation

$$cX^2 + bX + a = 0. \tag{1}$$

1er cas : si $b^2 - 4ac > 0$, α et β sont les deux racines de l'équation (1).
2e cas : si $b^2 - 4ac = 0$, α est la racine double de l'équation (1) et β est choisi arbitrairement différent de α.
On pose $f(x,y) = F(u,v)$.

1) Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celles de F.

2) Résoudre l'EDP :

$$2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

3) Même question pour l'EDP :

$$9\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 6\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par l'ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$.

1) Montrer que le domaine $\mathcal{D}$ peut être décrit en posant $x = a\ r\cos\theta$ et $y = b\ r\sin\theta$ où $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a et b étant deux nombres réels à déterminer.

2) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{1+x^2+4y^2}$.

Exercice 4

Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

a) $u_n = 2^{-\sqrt{n}}, \;\; n \geq 0.$

b) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(\ln n)^2}, \;\; n \geq 2.$