Centre de Mathématiques

Devoir surveillé n° 2 d'analyse 4

Date : Jeudi 20 janvier 2011
Durée : 1h30 (08h30-10h00)
Nombre de pages : **4**

Documents et appareils électroniques interdits - Répondre dans les cadres en justifiant les réponses.

Coller l'étiquette dans ce cadre

NOM : Prénom :

GROUPE :

Exercice 1

On se propose de résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\,\frac{\partial f}{\partial y} - y\,\frac{\partial f}{\partial x} = f, \tag{1}$$

où $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, on définit la fonction $\varphi :]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(r,\theta) = f(x,y)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

1) Exprimer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, x et y.

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} =$

2) Déterminer une équation aux dérivées partielles vérifiée par φ et la résoudre. On rappelle que les solutions de l'équation différentielle ordinaire $g'(t) = g(t), \forall t \in \mathbb{R}$ sont de la forme $g(t) = \lambda e^t$ où λ est une constante arbitraire dans $\mathbb{R}$.

3) En déduire les solutions de l'équation (1).

Exercice 2

Étudier les extrema locaux de la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3(y - x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f en $(0,0)$.

2) Calculer les dérivées partielles premières de f en $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Calculer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

4) Étudier, en utilisant la définition, la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 4

Soit Γ la courbe de $\mathbb{R}^2$ donnée implicitement par l'équation $x^4 - y^4 + xy - 1 = 0$. Nous admettrons que y peut s'exprimer comme une fonction de x, c'est-à-dire que $y = \varphi(x)$, au voisinage du point $(1, 0)$.

1) Calculer $\varphi'(1)$.

2) Déterminer $\varphi''(1)$ et un développement limité à l'ordre 2 de φ en $x = 1$.