INSA de Rennes

Année Universitaire 2011-2012

2e année, Analyse 4

Date : 8 novembre 2011 **Durée : 1h30**

Tous documents et appareils électroniques interdits.
Vous devez indiquer vos noms et prénoms et coller l'étiquette d'identification au verso avant de rendre cette feuille complétée, glissée dans votre copie.

Exercice 1 : Soient $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

On définit aussi $I_A = \int_0^{A} \frac{dx}{1+x^2}$, $J_A = \int_0^{A} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1. Montrer que I et J convergent.
2. Montrer que $I_A = \frac{A}{1+A^2} + \int_0^A \frac{2x^2dx}{(1+x^2)^2}$.
3. Sachant que $2x^2 = 2(1+x^2) - 2$, en déduire J_A en fonction de A et I_A.
4. Déterminer les valeurs de I et J.

Exercice 2 : Soient f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Etudier la continuité de cette fonction à l'origine.

Tourner SVP

Coller l'étiquette identification :

Nom et Prénom :
Groupe :

Exercice 3 : Dans les phrases suivantes, "CNS" signifie "condition nécessaire et suffisante."

Question :	*Réponse :*
CNS sur α réel pour que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge :	
CNS sur β réel pour que $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\beta}$ converge :	
CNS sur α réel pour que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha(1+k^\alpha)}$ converge :	
CNS sur β réel pour que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\beta}{1+x^\beta}\,dx$ converge :	
$\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k}\right) =$	

La réponse à chaque question ci-dessous est convergence (**CV**) ou divergence (**DIV**).
(1 point si réponse correcte, 0 si pas de réponse, -1 si erreur.)

Question :	*Réponse :*
Nature de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$	
Nature de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^k}{3^k}$	
Nature de la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2}{1+k^3}$	
Nature de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$	
Nature de la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k k}{1+k^3}$	