Centre de Mathématiques

Année universitaire 2012/13
2ème année **Analyse 4**

**DS Analyse 4 – 9 novembre 2012 – durée 1h30**

*Tous documents et appareils électroniques interdits.*

---

**Exercice 1**

**1.1.** Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$ ?

**1.2.** Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)+1}$ ?

**1.3.** Calculer la somme de la série numérique $\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$.

**Exercice 2** Pour $x > 0$, on définit $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

**2.1.** Donner rapidement l'allure de la représentation graphique de $f$ sur $]0, +\infty[$.

**2.2.** Rappeler le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0.
Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

**2.3.** Calculer $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.
*[Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.]*

**2.4.** Que peut-on dire au sujet de la nature de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ ?

**Exercice 3** Soit $f$ la fonction paire de période $2\pi$ définie par $f(t) = \pi - t$ pour $t \in [0, \pi]$.

**3.1.** Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

**3.2.** Donner le développement en série de Fourier $S(f)$ de $f$, étudier sa convergence et préciser pour quels $t$, on a l'égalité $f(t) = S(f)(t)$.

**3.3.** En déduire la somme de la série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

**3.4.** Calculer ensuite $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.