NOM + code barre

Année universitaire 2014-2015
1ère année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ 2 — ANALYSE 2 — mardi 2 juin 2015 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits
Le sujet comporte 4 pages et **4 exercices indépendants**.

Exercice 1 Cocher et remplir les cases suivantes.

1.1 On considère un système de n équations à n inconnues qui s'écrit sous forme matricielle $AX = 0$.

Si $\det(A) = 0$ alors : pas de solution ☐ infinité de solutions ☐ unique solution $X =$

Si $\det(A) \neq 0$ alors : pas de solution ☐ infinité de solutions ☐ unique solution $X =$

1.2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors : A^{-1} n'existe pas ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

1.3 La solution générale de l'EDO $y'' + 10y' + 25 = 0$ sur $\mathbb{R}$ est

Exercice 2 On considère l'EDO (1) $y''(t) + \dfrac{y'(t)}{t} = 1$ pour $t \in I =]0, +\infty[$.

2.1 Pourquoi les résultats du cours ne s'appliquent directement pour résoudre l'EDO (1) ?

En faisant le changement de fonction $z(t) = y'(t)$, on obtient la nouvelle EDO (2) $z'(t) + \dfrac{z(t)}{t} = 1$ pour $t \in I$, satisfaite par la nouvelle fonction z.

2.2 Quelle est la nature de cette nouvelle EDO (2) ?

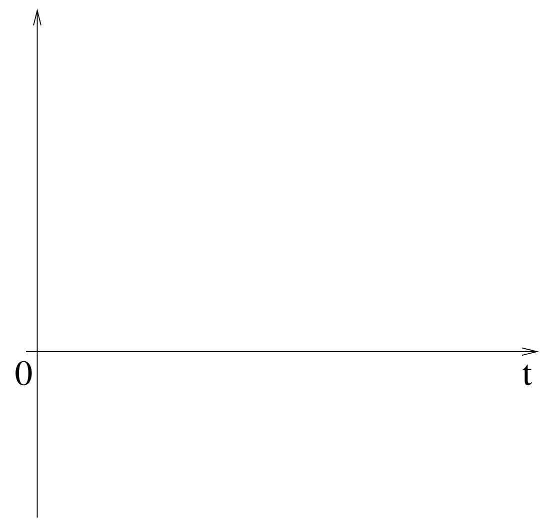
2.3 Solution générale de l'EDO homogène associée à (2) **2.4** Une solution particulière de (2)

2.5 Solution générale de l'EDO (2).

2.6 En déduire que la solution générale de l'EDO (1) est $y_g(t) = \lambda_1 \ln t + \frac{t^2}{4} + \lambda_2,\ \ \lambda_1, \lambda_2$ constantes.

En admettant le résultat de la question 2.6, il est possible de traiter la fin de l'exercice.

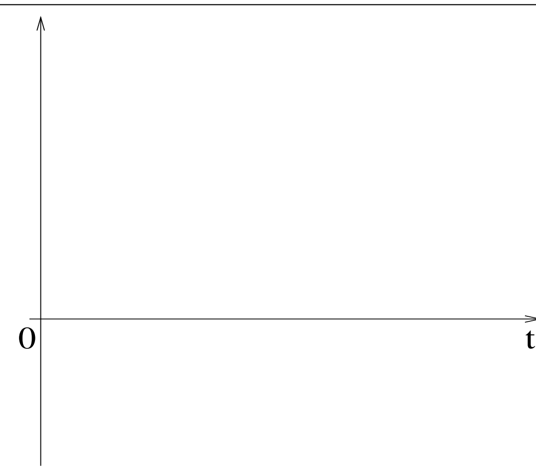
2.7 Déterminer la solution de l'EDO (1) qui satisfait $y(1) = 0$ et $y(2) = \frac{3}{4} + \ln(2)$ et tracer l'allure de la courbe $t \in I \mapsto y(t)$.



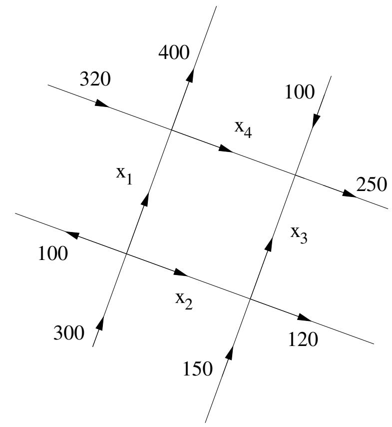
2.8 Écrire des commandes Matlab permettant de tracer la fonction $y(t)$ obtenue ci-dessus.

```
>>
```

2.9 Déterminer la solution de l'EDO (1) qui vérifie $\lim_{t \to 0} y(t) = 0$ tracer la courbe $t \in I \mapsto y(t)$.



Exercice 3
Le plan ci-contre représente un quartier d'une ville avec des rues à sens unique. On a compté le trafic dans certaines rues pendant une heure ; on suppose que les voitures qui sont entrées dans la rue pendant cette heure sont les mêmes que celles qui sont sorties. Le but est de déterminer le trafic dans les rues où il n'a pas été mesuré.



En faisant le bilan du flux de voitures à chaque intersection, écrire le système d'équations pour les inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 sous la forme matricielle $AX = B$.

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Matrice augmentée du système

Forme échelon réduite

Système réduit

Ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ du système de départ

Peut-on retrouver quel a été le trafic dans toutes les rues ? (cochez votre réponse) oui ☐ non ☐

Pour $i = 1, 2, 3, 4$, on note $x_{i,\text{min}}$ et $x_{i,\text{max}}$ le trafic minimum et maximum dans la rue i. Remplissez le tableau ci-dessous.

$x_{1,\text{min}} =$	$x_{2,\text{min}} =$	$x_{3,\text{min}} =$	$x_{4,\text{min}} =$
$x_{1,\text{max}} =$	$x_{2,\text{max}} =$	$x_{3,\text{max}} =$	$x_{4,\text{max}} =$

Il se trouve que pendant l'heure où ont été faites les mesures, la rue 2 était fermée à la circulation. Quel a été le trafic ?

$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$

Écrire des commandes Matlab permettant de définir la matrice A et le vecteur B écrits ci-dessus.

```
>> A=

>> B=
```

Exercice 4 À l'aide de la méthode de Newton-Raphson, on veut calculer $\sqrt[3]{2}$ à la précision 10^{-2} près en utilisant la fonction $f(x) = x^3 - 2$.

On demande de tracer la courbe représentative de f, de donner explicitement la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie pour approcher $\sqrt[3]{2}$, d'énoncer les hypothèses d'application du théorème de Newton-Raphson, de préciser pour quelles valeurs initiales x_0 dans $[0, +\infty[$ la suite converge vers $\sqrt[3]{2}$ (aucun calcul n'est demandé) et d'effectuer le calcul approché en démarrant de $x_0 = 1$.

Résultat obtenu : $\sqrt[3]{2} = \boxed{} , \boxed{}\boxed{}$ à 10^{-2} près.

Expliquer brièvement ce que fait la fonction Matlab suivante :

```
function[u,v]=resultat(u0,n)
  u=u0;
    for i=1:n
      u=2*(u+1/(u*u))/3;
    end
  v=u*u*u-2;
```