DEVOIR SURVEILLÉ TRONC COMMUN 3ème année MATHÉMATIQUES

Durée : 2h

DOCUMENTS, PORTABLES ET CALCULATRICES INTERDITS

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I. Alors

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}\right) \in L^1(\mathbb{R})$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}\right) \in L^1(\mathbb{R})$

☐ $\left(x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\right) \in L^2([0,+\infty[)$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}\right) \in L^2(\mathbb{R})$ ☐ $\left(x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$

2. On a

☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2\, x\, e^{-nx}\, dx = 0$ ☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx = 0$

☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\, dx = 0$ ☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+n)^2}\, dx = 0$

3. L'intégrale double $\displaystyle\int_{[0,+\infty[^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ est égale à

☐ π ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

4. La transformée de Fourier de la fonction $\left(x \mapsto \begin{cases} x^2\, e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}\right)$ en $\xi \in \mathbb{R}$, est égale à

☐ $\dfrac{1}{(1+2i\pi\,\xi)^2}$ ☐ $\dfrac{2}{(1+2i\pi\,\xi)^2}$ ☐ $\dfrac{1}{(1+2i\pi\,\xi)^3}$ ☐ $\dfrac{2}{(1+2i\pi\,\xi)^3}$

5. À l'aide du théorème de Plancherel appliqué à $\mathcal{F}\left(e^{-2\pi|x|}\right)$, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}$ donne

☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π

6. À l'aide de $\mathcal{F}\left(1_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}\right)$, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi$ donne

☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π

7. Soit $f(x) := e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. La transformée de Fourier de $f * f$ en $\xi \in \mathbb{R}$, est égale à

☐ 1 ☐ $e^{-\pi\xi^2}$ ☐ $2\, e^{-\pi\xi^2}$ ☐ $e^{-2\pi\xi^2}$ ☐ $\dfrac{2}{(1+\xi^2)}$ ☐ $\dfrac{1}{(1+\xi^2)^2}$

Variables complexes

8. Soit $f(z) = \dfrac{1}{z+2i}$ et $C(0,1)^+$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique. On a :

- ☐ f n'est holomorphe nulle part
- ☐ f admet un pôle d'ordre 1 en $-2i$
- ☐ f est prolongeable par continuité en $-2i$
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$
- ☐ $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0.$

9. Le développement en série entière *au voisinage de* 1 de la fonction f de la question 8 est :

- ☐ il n'existe pas
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}} (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+2i)^{n+1}} (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z+2i)^n$

10. Le rayon de convergence de la série entière obtenue dans la question 9 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\sqrt{5}$ ☐ $+\infty$.

11. Le résidu de $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ en $z = i$ est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{3\pi}{8}$ ☐ $-\dfrac{3}{16}$ ☐ $-\dfrac{3i}{16}$ ☐ $\dfrac{i}{8}$.

12. Combien vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ☐ $-\dfrac{2\pi i}{\sqrt{3}}$ ☐ $\dfrac{1}{i\sqrt{3}}$ ☐ $-\pi i$ ☐ $+\infty$.

Correction du DS de janvier 2011
Tronc Commun 3ème année – Mathématiques

1. 3 bonnes réponses : $\left(x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\right) \in L^1([0,+\infty[)$, $\left(x \mapsto \frac{x}{x^2+1}\right) \in L^2(\mathbb{R})$, $\left(x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$.

2. 2 bonnes réponses conséquences du théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\, dx = 0$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires : $\displaystyle\int_{[0,+\infty[^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr = \frac{\pi}{2}$.

4. En intégrant deux fois par parties : $\hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{(1+2i\pi\,\xi)^3}$.

5. Calcul fait en cours : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}$.

6. Calcul fait en cours : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi = \pi$.

7. Soit $f(x) := e^{-\pi x^2}$. On a $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ (cours), d'où $\widehat{f*f}(\xi) = \left(\hat{f}(\xi)\right)^2 = e^{-2\pi\xi^2}$.

8. 3 bonnes réponses : La fonction f est une fraction rationnelle avec un pôle simple en $-2i$. Elle est donc holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$. En particulier, le disque fermé $\overline{D}(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1 est un compact à bord inclus dans $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$; par le théorème de Cauchy, $\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0$.

9. f étant holomorphe en 1, elle est développable en série entière au voisinage de 1 :

$$f(z) = \frac{1}{1+2i+(z-1)} = \frac{1}{1+2i}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+2i}} = \frac{1}{1+2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2i)^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}(z-1)^n.$$

10. Le rayon de convergence R est le rayon du plus grand disque ouvert de centre 1 inclus dans $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$, soit $R = |1-(-2i)| = \sqrt{5}$ (distance de 1 à $-2i$). On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert avec le développement obtenu dans la question précédente ($\sum a_n(z-1)^n$ avec $a_n = (-1)^n(1+2i)^{-n-1}$).

11. Le calcul a été fait en cours, on trouve $-3i/16$.

12. L'intégrale vaut $I = 2\pi/\sqrt{3}$. Il y a trois manières de le voir. Appelons $h(t) = (1+t+t^2)^{-1}$.

- Par déduction : h étant clairement intégrable sur $\mathbb{R}$, $+\infty$ est exclu. h étant une fonction strictement positive, 0 et tout nombre qui n'est pas réel sont exclus. Il reste 1 et $2\pi/\sqrt{3}$ comme possibilité. Mais $I > \int_1^{+\infty} dt/t^2 = 1$ donc $I = 2\pi/\sqrt{3}$.
- Par l'analyse complexe (démarche attendue) : c'est une intégrale du 2ème type (cf. cours),

$$h(z) = \frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{(z-\mathrm{j})(z-\bar{\mathrm{j}})} \text{ avec } \mathrm{j} = e^{2i\pi/3} \text{ et } \bar{\mathrm{j}} = e^{-2i\pi/3}.$$

  Par la formule des résidus,
$$\int_{\gamma_r} h(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(h,j) = 2\pi i\frac{1}{j-\bar{\mathrm{j}}} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

  où γ_r est le contour utilisé pour les intégrales du 2ème type, l'union du segment $[-r,r]$ et du demi-cercle supérieur de rayon r, pour $r > 0$ assez grand. En calculant directement l'intégrale sur le contour et en faisant $r \to +\infty$, on obtient $I = 2\pi/\sqrt{3}$.
- On calcule I en se ramenant, par changement de variable, à la dérivée d'arctan :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan(s)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$