INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2017-2018
3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 9 novembre 2017 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et de TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\frac{t}{1+t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\frac{t}{1+t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $t^3e^{-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $t^3e^{-t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

☐ $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t^2+1}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t^2+1}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^n+e^t}$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ -1 ☐ 1 ☐ $e-1$ ☐ $1-e$ ☐ $\frac{1}{e}-1$ ☐ $1-\frac{1}{e}$ ☐ $+\infty$

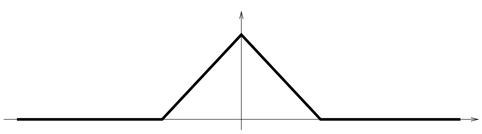
3. Pour $a > 0$, l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+at}$ vaut

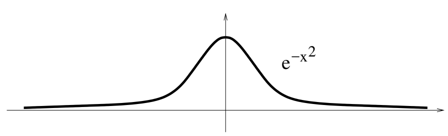
☐ n'existe pas ☐ $\ln(1+a)$ ☐ $-\ln(1+a)$ ☐ $\frac{\ln(1+a)}{a}$ ☐ $-\frac{\ln(1+a)}{a}$ ☐ $\frac{\ln(1+a)}{a}-\frac{1}{a}$

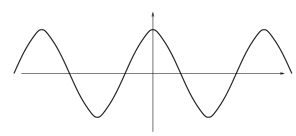
4. En calculant la dérivée de $I(a)$ de deux façons différentes, en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+at)^2}dt$ vaut

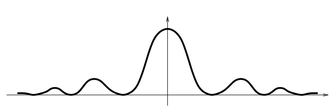
☐ $\frac{1}{1+a}$ ☐ $-\frac{1}{1+a}$ ☐ $-\frac{\ln(1+a)}{a^2}+\frac{1}{a(1+a)}$ ☐ $\frac{\ln(1+a)}{a^2}-\frac{1}{a(1+a)}$

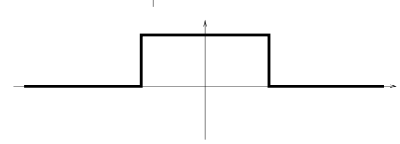
☐ $\frac{1}{a(1+a)}$ ☐ $-\frac{1}{a(1+a)}$ ☐ $\frac{\ln(1+a)}{a^2}$ ☐ $-\frac{\ln(1+a)}{a^2}$

5. Donner l'allure de la transformée de Fourier de 

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

☐ on ne peut pas tracer car elle est complexe

6. La transformée de Fourier de $e^{-\pi(t-3)^2}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $e^{-\pi(\xi-3)^2}$ ☐ $e^{-\pi(\xi+3)^2}$ ☐ $e^{-\pi(2i\xi+\xi^2)}$

☐ $e^{-\pi(6i\xi+\xi^2)}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2(\xi-3)^2}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi(6i\xi+\xi^2)}$ ☐ $e^{\pi(6i\xi-\xi^2)}$

7. En remarquant que $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ est la dérivée d'une fonction qui apparaît dans le tableau des transformées de Fourier distribué, $\hat{f}(\xi)$ vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $i\pi^2\xi e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $-i\pi^2\xi e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $i\pi^2\xi^2 e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $-i\pi\xi e^{-|\xi|}$

Analyse complexe

On rappelle que $C(a,r)^+$ désigne le cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ orienté dans le sens trigonométrique et que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{H}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

8. Soit $f(z) = \dfrac{z}{3-z}$

☐ f n'est holomorphe nulle part ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{3\})$

☐ f prolongeable par continuité en 3 ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-3\})$ ☐ 3 pôle ordre 1

☐ $\displaystyle\int_{C(3,1)^+} f(z)dz = 0$ ☐ $\displaystyle\int_{C(3,1)^+} f(z)dz = -6\pi i$ ☐ $\displaystyle\int_{C(1,1)^+} f(z)dz = 0$

☐ $\displaystyle\int_{C(1,1)^+} f(z)dz = \pi i$ ☐ $\displaystyle\int_{C(3,1)^+} (z-3)f(z)dz = 0$ ☐ $\displaystyle\int_{C(3,1)^+} (z-3)f(z)dz = -6\pi i$

9. Le développement en série entière de la fonction f de la question 8 au point $z = 1$ est :

☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} z^n$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^n$

☐ $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{n+1}} (z-1)^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n$ ☐ il n'existe pas.

10. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 9 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ 2 ☐ 3 ☐ $+\infty$.

11. Le résidu de $g(z) = \dfrac{2}{(z^2+1)^3}$ en $z = i$ est :

☐ 0 ☐ $-\dfrac{3i}{4}$ ☐ $\dfrac{3\pi}{4}$ ☐ $-\dfrac{3}{8}$ ☐ $-\dfrac{3i}{8}$ ☐ il n'existe pas.

12. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sin(t)}$ est

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $-\dfrac{i}{\sqrt{15}}$ ☐ $-\dfrac{2\pi}{\sqrt{15}}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{\sqrt{15}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{15}}$

Correction du DS de novembre 2017 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\frac{t}{1+t^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{t}{1+t^2}\right| \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc $\frac{t}{1+t^2}$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
$t^3e^{-t^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$. Comme, par croissances comparées, $|t^ke^{-t^2}| \underset{\pm\infty}{\to} 0$ pour tout $k>0$, on a $|t^3e^{-t^2}| \leq t^{-2}$ pour $t \geq A$ où A est assez grand, donc $t^3e^{-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continu sur $]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\left|\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$, donc $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ mais n'est pas dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.
$\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ est continu sur $\mathbb{R}$, et $\left|\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{1+t^2}}\right| \underset{\pm\infty}{\sim} \left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right|$ donc $\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

2. $f_n(t) = \dfrac{1}{t^n+e^t}$ est continue sur $[0,1]$ et $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} e^{-t}$ p.p. sur $[0,1]$. D'autre part, on a l'hypothèse de domination $|f_n(t)| \leq e^{-t} \leq 1 \in \mathrm{L}^1([0,1])$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}dt = 1-\frac{1}{e}$.

3. Par un calcul direct, $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+at} = \left[\frac{\ln(1+at)}{a}\right]_0^1 = \frac{\ln(1+a)}{a}$.

4. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral (les hypothèses sont satisfaites), $I'(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{1+at}\right)dt = -\int_0^1 \frac{t}{(1+at)^2}dt$.
D'autre part, en dérivant l'expression obtenue pour $I(a)$ dans la question précédente, on obtient $I'(a) = -\dfrac{\ln(1+a)}{a^2} + \dfrac{1}{a(1+a)}$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(1+at)^2}dt = -I'(a) = \frac{\ln(1+a)}{a^2} - \frac{1}{a(1+a)}$.

5. D'après l'exercice 7 de TD, on sait que la transformée de Fourier du signal de la question 5 est un sinus cardinal au carré. C'est donc la case 3 qu'il fallait cocher. On pouvait le voir facilement par déduction : ça ne pouvait pas être la gaussienne (case 1) car la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne ; ça ne pouvait pas être le signal sinusoïdal de la case 2 car il ne tend pas vers 0 en $\pm\infty$; ca ne pouvait pas être le créneau de la case 4 car c'est la transformée de Fourier du sinus cardinal ; enfin le signal proposé étant pair, sa transformée de Fourier est réelle donc la case 5 n'était pas à cocher.

6. Il suffit d'appliquer la formule de décalage en temps du cours à la transformée de Fourier de la gaussienne (donnée par le tableau pour $a=\pi$). On trouve $\widehat{e^{-\pi(t-3)^2}} = e^{-\pi(6i\xi+\xi^2)}$.

7. On remarque que $\dfrac{x}{(1+x^2)^2} = \left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}\right)'$. Par la formule de la transformée de Fourier de la dérivée, on obtient $\widehat{\dfrac{x}{(1+x^2)^2}} = -i\pi\xi\widehat{\dfrac{1}{1+x^2}}$. Par inversion de Fourier, on lit sur le tableau (ligne 4 avec $a=2\pi$), $\dfrac{1}{\pi}\widehat{\dfrac{1}{1+x^2}} = e^{-2\pi|\xi|}$. Finalement $\widehat{\dfrac{x}{(1+x^2)^2}} = -i\pi^2\xi e^{-2\pi|\xi|}$.

8. On a $f(z) = \dfrac{z}{3-z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{3\})$ et 3 est un pôle d'ordre 1 pour f (en particulier f n'est pas prolongeable par continuité en 3). Il suit alors, par la formule des résidus, $\displaystyle\int_{C(3,1)^+} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f,3) = 2\pi i\ \ (z-3)f(z)|_{z=3} = -6\pi i$. Comme $(z-3)f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, par le théorème de Cauchy, on a $\displaystyle\int_{C(3,1)^+}(z-3)f(z)dz = 0$. Enfin, f est holomorphe sur le compact à bord $\overline{D}(1,1) \subset \mathbb{C}\setminus\{3\}$ de bord $C(1,1)^+$ donc en appliquant à nouveau le théorème de Cauchy, $\displaystyle\int_{C(1,1)^+} f(z)dz = 0$.

9. On a :

$$\begin{aligned}\frac{z}{3-z} &= (1+z-1)\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}(1+z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(z-1)^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n+1}}(z-1)^n.\end{aligned}$$

10. $R=2$. Cela se voit directement sur la série entière ou en remarquant que $D(1,2)$ est le plus grand disque centré en 1 et contenu dans le domaine d'holomorphie $\mathbb{C}\setminus\{3\}$ de $\frac{z}{3-z}$.

11. Donné en cours : $\mathrm{Rés}(\frac{1}{(z^2+1)^3}, i) = -\frac{3i}{16}$ donc $\mathrm{Rés}(\frac{2}{(z^2+1)^3}, i) = -\frac{3i}{8}$

12. C'est une intégrale de type 1 (cf. cours) qui vaut $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$. Pour la calculer on introduit

$$f(z) = \frac{1}{4+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\ \frac{1}{iz} = \frac{2}{z^2+8iz-1} = \frac{2}{(z+4i-\sqrt{15}i)(z+4i+\sqrt{15}i)}$$

qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{(\sqrt{15}-4)i, -(\sqrt{15}+4)i\}$ avec des pôles d'ordre 1 en $z=(\sqrt{15}-4)i \in D(0,1)$ et $z=-(\sqrt{15}+4)i \notin D(0,1)$.
Il suit $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sin t} = \int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f,(\sqrt{15}-4)i) = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}$.