Année universitaire 2020-2021
Tronc Commun 3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 5 novembre 2020 — durée : 2h

Suite au confinement, une version légèrement différente de cet examen a été posée en distanciel le 19 novembre.

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{t^4}{1+e^{|t|}} \in L^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{t} \in L^1(]0,1[)$ ☐ $\dfrac{1}{t} \in L^1(]1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}} \in L^1(]0,+\infty[)$

☐ $\dfrac{t^4}{1+e^{|t|}} \in L^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{t} \in L^2(]0,1[)$ ☐ $\dfrac{1}{t} \in L^2(]1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}} \in L^2(]0,+\infty[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+(\sin(t))^n+t^2}$ quand $n \to +\infty$?

☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ 1 ☐ $+\infty$ ☐ n'existe pas

3. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(tx)}{x}dx$. Cocher les assertions correctes (il peut y en avoir plusieurs) :

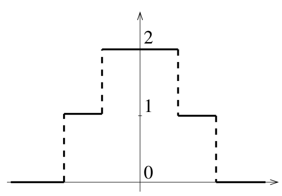
☐ $F'(t)$ n'existe pas ☐ $F'(t) = 0$ ☐ $F'(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(tx)}{x}dx$ ☐ $F'(t) = \displaystyle\int_0^1 \cos(tx)dx$

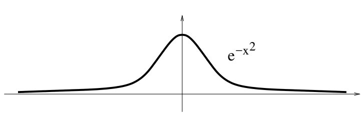
☐ $F'(t) = \displaystyle\int_0^1 t\cos(tx)dx$ ☐ $F'(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ ☐ $F'(t) = \sin(t)$ ☐ $F'(t) = \sin(1)$

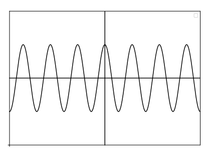
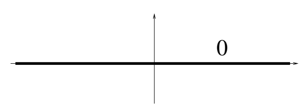
4. L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$ vaut

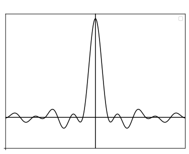
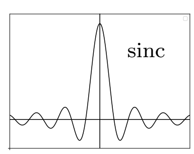
☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ 4π ☐ $+\infty$

5. Donner l'allure de la transformée de Fourier du signal



☐ 

☐ 
☐ 

☐ 
☐ 

☐ Elle n'existe pas

6. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Alors

☐ $\widehat{f*f'}$ n'existe pas ☐ $\widehat{f*f'}(\xi) = 0$ ☐ $\widehat{f*f'}(\xi) = -2i\pi^2\xi\, e^{-2\pi^2\xi^2}$ ☐ $\widehat{f*f'}(\xi) = 2i\pi^2\xi\, e^{-2\pi^2\xi^2}$

☐ $f*f'$ n'existe pas ☐ $f*f'(x) = 0$ ☐ $f*f'(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ☐ $f*f'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$

7. À l'aide de la formule de Plancherel, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)^2}d\xi$ donne

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{3}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

Analyse complexe

8. La fonction $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^{10}}$

- ☐ n'est holomorphe nulle part
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$
- ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ a une singularité éliminable
- ☐ a un pôle d'ordre 1
- ☐ a un pôle d'ordre 9
- ☐ a un pôle d'ordre 10
- ☐ a une singularité essentielle
- ☐ $\text{Rés}(f, 0) = 0$
- ☐ $\text{Rés}(f, 0) = \dfrac{1}{8!}$
- ☐ $\text{Rés}(f, 0) = -\dfrac{1}{8!}$
- ☐ $\text{Rés}(f, 0) = \dfrac{1}{9!}$
- ☐ $\text{Rés}(f, 0) = -\dfrac{1}{9!}$
- ☐ $\text{Rés}(f, 0)$ n'existe pas

On considère le logarithme complexe principal $\text{Log}\,(z)$ sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et la fonction puissance associée.

9. Le calcul de $(-i)^i$ donne

☐ n'a pas de sens ☐ 0 ☐ -1 ☐ 1 ☐ $e^{-\pi/2}$ ☐ $e^{\pi/2}$ ☐ $-e^{-\pi/2}$ ☐ $e^{-3\pi/2}$

10. Le développement en série entière au voisinage de $\underline{z = 2}$ de $\text{Log}\,(z)$ est :

- ☐ $\ln(2) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$
- ☐ $\ln(2) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-2)^n$
- ☐ $\ln(2) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} (z-2)^n$
- ☐ $\ln(2) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} (z-2)^n$
- ☐ $\ln(2) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} (z-2)^n$
- ☐ il n'existe pas

11. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 10 est :

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ 4 ☐ $+\infty$ ☐ il n'existe pas

12. L'intégrale $\displaystyle\int_{C(2,1)^+} \frac{\text{Log}\,(z)}{z-2} dz$ (où $C(2,1)^+$ est le cercle de centre 2 et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique) vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ πi ☐ $-2\pi i$ ☐ $2\pi i$ ☐ $2\pi i \ln(2)$ ☐ $-2\pi i \ln(2)$ ☐ $\ln(2)$

13. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\pi x}}{x^2 - 2x + 5} dx$?

☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{2} e^{-2\pi}$ ☐ $-\dfrac{\pi}{2} e^{-2\pi}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2} e^{2\pi}$ ☐ $-\dfrac{\pi}{2} e^{2\pi}$ ☐ $\dfrac{i}{4} e^{-2\pi}$ ☐ n'existe pas

Correction du DS de novembre 2020 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{t^4}{1+e^{|t|}}$ est continue donc il n'y a des problèmes d'intégrabilité qu'en $\pm\infty$. Comme la fonction est paire, on peut se restreindre à étudier l'intégrabilité sur $[A, +\infty[$ pour $A > 0$. Mais, par croissances comparées, $\dfrac{t^6}{1+e^{|t|}} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ donc, $\forall t \geq A \geq 1$ avec A assez grand, $\left|\dfrac{t^4}{1+e^{|t|}}\right| \leq \dfrac{1}{t^2} \in L^1([A, +\infty[)$. Par comparaison, il suit $\dfrac{t^4}{1+e^{|t|}} \in L^1([A, +\infty[)$ et on conclut $\dfrac{t^4}{1+e^{|t|}} \in L^1(\mathbb{R})$. Comme $\left|\dfrac{t^4}{1+e^{|t|}}\right|^2 = \dfrac{t^8}{(1+e^{|t|})^2}$, par le même raisonnement, on conclut que $\dfrac{t^4}{1+e^{|t|}} \in L^2(\mathbb{R})$.
L'intégrabilité de $\dfrac{1}{t}$ est une question de cours (intégrale de référence de Riemann avec $\alpha = 1$) : $\dfrac{1}{t} \notin L^1(]0,1[)$ et $\dfrac{1}{t} \notin L^1(]1, +\infty[)$.
Pour l'appartenance à L^2, il suffit de regarder l'intégrabilité de $\dfrac{1}{t^2}$ (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$) : $\dfrac{1}{t^2} \notin L^1(]0,1[)$ et $\dfrac{1}{t^2} \in L^1(]1, +\infty[)$ donc $\dfrac{1}{t} \notin L^2(]0,1[)$ et $\dfrac{1}{t} \in L^2(]1, +\infty[)$.
La fonction $t \in]0, +\infty[\mapsto \dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}}$ est continue, on a des problèmes d'intégrabilité en 0 et en $+\infty$. En 0, $\left|\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}}\right| = \left|\dfrac{1+it+o(t)-1}{t^{3/2}}\right| \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \in L^1(]0,1[)$ donc $\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}}$ est intégrable en 0. En $+\infty$, $\left|\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}}\right| \leq \dfrac{2}{t^{3/2}} \in L^1(]1, +\infty[)$ donc $\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$. On conclut $\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}} \in L^1(]0, +\infty[)$. Pour l'appartenance à L^2, on remarque que $\left|\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}}\right|^2 \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t} \notin L^1(]0,1[)$ donc $\dfrac{e^{it}-1}{t^{3/2}} \notin L^2(]0, +\infty[)$.

2. On a $f_n(t) := \dfrac{1}{2+(\sin(t))^n + t^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{2+t^2}$ p.p. sur $[0, +\infty[$ et $|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \in L^1(]0, +\infty[)$ (car $2+(\sin(t))^n + t^2 \geq 1+t^2$ sur $[0, +\infty[$). Donc, par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3. L'intégrande $f(t,x) = \dfrac{\sin(tx)}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ (elle se prolonge par continuité par $f(t,0) = t$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$). Elle est intégrable en x sur $[0,1]$ car $\left|\dfrac{\sin(tx)}{x}\right| \leq t$ est borné en x. De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \cos(tx)$ existe pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ et est dominée : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq 1 \in L^1([0,1])$ (en x). Par le théorème de dérivation sous le signe intégral (dont nous venons de vérifier les hypothèses), on obtient que $F'(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $F'(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dx = \int_0^1 \cos(tx)dx$ (une première case à cocher).
Mais cette intégrale se calcule, $F'(t) = \left[\dfrac{\sin(tx)}{t}\right]_{x=0}^{x=1} = \dfrac{\sin(t)}{t}$ (deuxième case à cocher).
Remarque : la primitive du sinus cardinal ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles donc on ne peut pas poursuivre le calcul.

4. On commence par un changement en polaires $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{1}{2}r^2}dr$.
Ensuite, on peut soit faire un changement de variable $y = r^2$ soit une intégration par parties en dérivant r^2 et en intégrant $re^{-\frac{1}{2}r^2}$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{1}{2}r^2}dr = \left[-r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} 2re^{-\frac{1}{2}r^2} = 0 + \left[-2e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{+\infty} = 2$. Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy = 4\pi$.

5. Le signal dont on demande de calculer la transformée de Fourier est la somme de 2 créneaux centrés. Sa transformée est donc la somme de 2 sinus cardinaux de fréquences différentes (4ème case à cocher).
Par exemple : $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]} + \mathbb{1}_{[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]})(\xi) = \frac{1}{\pi}\text{sinc}(\xi) + \frac{2}{\pi}\text{sinc}(2\xi) = \frac{2}{\pi\xi}\sin(\frac{3\xi}{2})\cos(\frac{\xi}{2})$.

6. $f(x) = e^{-x^2}$ et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ (elles sont même dans l'espace de Schwartz). Donc $f * f'$ existe presque partout et $\widehat{f * f'} = \widehat{f}\widehat{f'}$. Mais $\widehat{f'} = 2i\pi\xi\widehat{f}$ et $\widehat{f} = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$. On obtient alors $\widehat{f * f'} = 2i\pi\xi(\widehat{f})^2 = 2i\pi^2\xi e^{-2\pi^2\xi^2}$.
Par inversion, il suit $f * f'(-x) = \mathcal{F}(2i\pi^2\xi e^{-2\pi^2\xi^2})(x) = 2i\pi^2\mathcal{F}(\xi e^{-2\pi^2\xi^2})(x) = \frac{2i\pi^2}{-2i\pi}\mathcal{F}(e^{-2\pi^2\xi^2})'(x) = -\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = \sqrt{\frac{\pi}{2}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$. D'où $f * f'(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
Remarque : on pouvait calculer directement $f * f'$ à partir de la définition du produit de convolution.

7. Par la formule de Plancherel (et la 4ème ligne du tableau avec $a = 2\pi$),
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{4\pi}{4\pi^2+4\pi^2\xi^2}\right|^2 d\xi = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi|x|}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-4\pi x}dx = \frac{1}{2\pi}$. D'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2}$.
Remarque : cette intégrale a déjà été calculée en TD (I_5 dans l'exercice 16).

8. La fonction f est un quotient de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ donc est holomorphe partout où le dénominateur ne s'annule pas, donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. La seule singularité est donc 0 et c'est un pôle d'ordre 9 car $(z-0)^9 f(z) = \frac{\sin(z)}{z} \underset{z\to0}{\to} 1 \neq 0$. Rés$(f,0)$ est le coefficient $c_{9-1} = c_8$ du terme en z^8 du développement en série entière (DSE) de la fonction « corrigée » $z^9 f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$. Pour obtenir le DSE de sinc, il suffit de diviser celui de sin par z, soit $z^9 f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \frac{z^8}{9!} + \cdots$ donc Rés$(f,0) = \frac{1}{9!}$.

9. Par définition, $(-i)^i = e^{i\,\mathrm{Log}(-i)} = e^{i(i\mathrm{Arg}(-i))} = e^{\frac{\pi}{2}}$ car l'argument principal de $-i$ (celui dans $]-\pi,\pi[$) est $-\frac{\pi}{2}$.

10. $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(2+z-2) = \mathrm{Log}(2(1+\dfrac{z-2}{2})) = \mathrm{Log}(2)+\mathrm{Log}(1+\dfrac{z-2}{2}) = \ln(2)+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{z-2}{2})^n = \ln(2)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(z-2)^n$.
On pouvait utiliser ici directement la formule donnant les coefficients du développement en série entière car il est facile de calculer les dérivées n-èmes de la fonction à développer : $c_n = \frac{1}{n!}(\mathrm{Log}(z))^{(n)}(2) = \frac{1}{n!}\left.\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}\right|_{z=2} = \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$.

11. $R = 2$: se voit sur le DSE ci-dessus avec le critère de d'Alembert par exemple, ou géométriquement en calculant la distance de 2 à $\mathbb{R}^-$ (l'ensemble où $\mathrm{Log}(z)$ n'est pas holomorphe).

12. $\mathrm{Log}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-)$ et $\overline{D}(2,1)$ est un compact à bord de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ de bord $C(2,1)^+$ donc, d'après la formule de Cauchy, $\displaystyle\int_{C(2,1)^+}\frac{\mathrm{Log}\,(z)}{z-2}dz = 2\pi i\,\mathrm{Log}(2) = 2\pi i\ln(2)$.

13. L'intégrale relève du cas 2 traité en cours (intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle sans pôle réel et de degré inférieur ou égal à -2). On pose $R(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^2-2z+5} = \dfrac{e^{i\pi z}}{(z-1+2i)(z-1-2i)}$. On a donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\pi x}}{x^2-2x+17}dx = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(R,1+2i) = 2\pi i\left.\frac{e^{i\pi z}}{z-1+2i}\right|_{z=1+2i} = 2\pi i\frac{e^{i\pi(1+2i)}}{4i} = -\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$.