Année universitaire 2023-2024
Tronc Commun 3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 9 novembre 2023 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^1(]-1,1[)$ ☐ $\dfrac{e^{it}}{t} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{\cos(t)-1}{t^2} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$

☐ $\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^2(]-1,1[)$ ☐ $\dfrac{e^{it}}{t} \in \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{\cos(t)-1}{t^2} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}dx$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ $-\dfrac{\pi}{4}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $-\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

3. Soit $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On définit $\varphi(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t-x)^2}}{1+x^2}dx$. On a :

☐ $\varphi(t)$ n'existe pas ☐ $\varphi(t) = (f * g)(t)$ ☐ $\varphi(t) = -(f * g)(t)$

☐ $\varphi'(t)$ n'existe pas ☐ $\varphi'(t) = -2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{(t-x)e^{-(t-x)^2}}{1+x^2}dx$ ☐ $\varphi'(t) = 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{(t-x)e^{-(t-x)^2}}{1+x^2}dx$

☐ $\varphi'(t) = 0$ ☐ $\varphi'(t) = (f' * g)(t)$ ☐ $\varphi'(t) = -(f' * g)(t)$

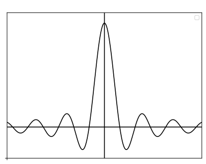
☐ $\varphi'(t) = \sqrt{\pi}$ ☐ $\varphi'(t) = (f * g')(t)$ ☐ $\varphi'(t) = -(f * g')(t)$

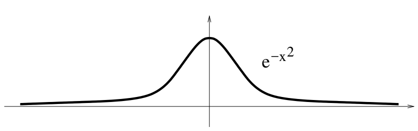
4. La transformée de Fourier de $\dfrac{1}{1+(x+3)^2}$ vaut

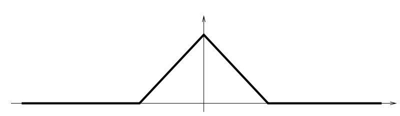
☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\pi e^{-2\pi(3i\xi+|\xi|)}$ ☐ $\pi e^{2\pi(3i\xi-|\xi|)}$ ☐ $4\pi^2 e^{2\pi(3i\xi-|\xi|)}$

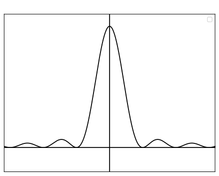
☐ $\pi e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}e^{2\pi(3i\xi-|\xi|)}$ ☐ $\pi e^{2\pi(6i\xi-|\xi|)}$ ☐ $\pi e^{2\pi(3i\xi+|\xi|)}$ ☐ $e^{2\pi(3i\xi-|\xi|)}$

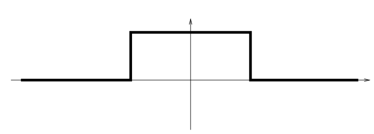
5. Donner l'allure de la transformée de Fourier du sinus cardinal



☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

☐ on ne peut pas tracer car elle est complexe

6. Soient deux fonctions $y, f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ avec y deux fois dérivable et $y', y'' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On suppose que $y''(t) + 2\pi y'(t) + \pi^2 y(t) = f(t)$ pour tous $t \in \mathbb{R}$. Alors $\hat{y}(\xi)$ vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\hat{f}(\xi)$ ☐ $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{(\pi+1)^2}$ ☐ $\dfrac{\hat{f}(\xi)}{4\pi^2(\xi-\frac{i}{2})^2}$ ☐ $\dfrac{-\hat{f}(\xi)}{4\pi^2(\xi-\frac{i}{2})^2}$ ☐ $\dfrac{-\hat{f}(\xi)}{4\pi^2(\xi+\frac{i}{2})^2}$

Analyse complexe

7. Soit $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(z+2)^3}$.

Le point $z = 0$ est

☐ une singularité éliminable ☐ un pôle ☐ une singularité essentielle

Le point $z = -2$ est

☐ une singularité éliminable ☐ un pôle ☐ une singularité essentielle

Le domaine d'holomorphie de f est exactement :

☐ $\emptyset$ ☐ $\mathbb{C}$ ☐ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ☐ $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ ☐ $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$ ☐ $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$

$\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz =$ ☐ 0 ☐ $2\pi i$ ☐ $-2\pi i$ ☐ $\dfrac{\pi i}{4}$ ☐ $\dfrac{\pi^2}{4}$ ☐ 1 ☐ n'existe pas

$\displaystyle\int_{C(0,3)^+} f(z)dz =$ ☐ 0 ☐ $2\pi i$ ☐ $\dfrac{\pi}{4}(1 - 5e^{-2})i$ ☐ $\dfrac{\pi}{4}(1 + 5e^{-2})i$ ☐ n'existe pas

8. Le développement en série entière de la fonction $g(z) = \dfrac{1}{(6-z)^2}$ au point $z = 0$ est

☐ $\displaystyle\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)z^n$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{6^{n+2}}z^n$

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{6^{n+2}}z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{6^{n+2}}(z-6)^n$ ☐ il n'existe pas.

9. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 8 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ 3 ☐ 6 ☐ $\dfrac{1}{6}$ ☐ $\sqrt{6}$ ☐ $+\infty$.

10. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+(x+3)^2}dx$?

☐ 0 ☐ π ☐ $\dfrac{\pi}{2}e^{-1-3i}$ ☐ πe^{-1+3i} ☐ πe^{-1-3i} ☐ $\dfrac{i}{2}e^{-1-3i}$ ☐ n'est pas définie

Correction du DS de novembre 2023 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ et $\left|\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. Mais $\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}\right|^2 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t} \notin \mathrm{L}^1(]0,1[)$.
$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-t)}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$. De même, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{t\to -1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1+t)}} \in \mathrm{L}^1(]-1,0[)$. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]-1,1[)$. Mais $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right|^2 = \dfrac{1}{(1-t)(1+t)}$ qui n'est clairement pas intégrable sur $]-1,1[$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^2(]-1,1[)$.
$\dfrac{e^{it}}{t}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{e^{it}}{t}\right| = \dfrac{1}{t} \notin \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$. Mais $\dfrac{e^{it}}{t}$ est dans $\mathrm{L}^2([1,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{e^{it}}{t}\right|^2 = \dfrac{1}{t^2} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$.
Comme $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ au voisinage de 0, on a $\dfrac{\cos(t)-1}{t^2} \underset{t\to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}$ et donc $\dfrac{\cos(t)-1}{t^2}$ est intégrable en 0. Par ailleurs, pour $t \geq 1$, $\left|\dfrac{\cos(t)-1}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2} \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. Finalement, $\dfrac{\cos(t)-1}{t^2} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. De même, d'une part $\left|\dfrac{\cos(t)-1}{t^2}\right|^2$ est prolongeable par continuité en 0 et, d'autre part, pour $t \geq 1$, $\left|\dfrac{\cos(t)-1}{t^2}\right|^2 \leq \dfrac{4}{t^4} \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. On conclut que $\dfrac{\cos(t)-1}{t^2} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.

2. On a $f_n(x) := \dfrac{e^{-x/n}}{1+x^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{1+x^2}$ p.p. sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $x \geq 0$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2} \in L^1([0,+\infty[)$ donc l'hypothèse de domination est satisfaite. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

3. La fonction φ est une intégrale à paramètre $\varphi(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t,x)dx$ avec $h(t,x) = f(t-x)g(x) = \dfrac{e^{-(t-x)^2}}{1+x^2}$. Comme $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on reconnaît la définition de la convolution dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Donc $\varphi(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\varphi(t) = (f * g)(t)$ (1 case à cocher). D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale (exercice : les hypothèses sont satisfaites), on obtient $\varphi'(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)dt = \int_{\mathbb{R}} f'(t-x)g(x)dx$ soit encore $\varphi'(t) = (f' * g)(t)$ (1 case à cocher). En calculant explicitement $f'(t-x)$, on obtient $\varphi'(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{-2(t-x)e^{-(t-x)^2}}{1+x^2}dx$ (1 case à cocher). Enfin, par intégration par parties, on a $\varphi'(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f'(t-x)g(x)dx = [-f(t-x)g(x)]_{x=0}^{x=+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g'(x)dx = 0 + (f * g')(t)$ (1 case à cocher).

4. D'après le tableau des transformées de Fourier (prendre $a = 2\pi$ dans la 4ème ligne), on a $\widehat{\dfrac{1}{1+x^2}} = \pi e^{-2\pi|\xi|}$. Par la formule de décalage en temps (avec $\tau = -3$), on obtient alors $\widehat{\dfrac{1}{1+(x+3)^2}} = \pi e^{6i\pi\xi}e^{-2\pi|\xi|} = \pi e^{2\pi(3i\xi - |\xi|)}$.

5. D'après le cours, on sait que la transformée de Fourier du sinus cardinal est un créneau centré, c'est donc la 4ème case qu'il fallait cocher.

6. Sous les hypothèses de la question, il est possible de prendre la transformation de Fourier de l'égalité $y''(t) + 2\pi y'(t) + \pi^2 y(t) = f(t)$ pour obtenir $\widehat{y''}(\xi) + 2\pi\widehat{y'}(\xi) + \pi^2\hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Comme $\widehat{y''}(\xi) = (2i\pi\xi)^2\hat{y}(\xi)$ et $\widehat{y'}(\xi) = (2i\pi\xi)\hat{y}(\xi)$, on a $(-4\pi^2\xi^2 + 4\pi^2 i\xi + \pi^2)\hat{y}(\xi) = -4\pi^2(\xi - \frac{i}{2})^2\hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Finalement $\hat{y}(\xi) = \dfrac{-\hat{f}(\xi)}{4\pi^2(\xi - \frac{i}{2})^2}$.

7. A priori, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0,-2\})$ comme quotient de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ avec un dénominateur qui s'annule en $z=0$ et $z=-2$. Le point singulier $z=0$ est une singularité éliminable car $f(z) \underset{z\to 0}{\to} \dfrac{1}{8}$ (limite finie) donc f est en réalité holomorphe en 0. Le point singulier $z=-2$ est un pôle d'ordre 3 de f car $g(z) = (z+2)^3 f(z) = \dfrac{e^z-1}{z} \underset{z\to -2}{\to} \dfrac{1-e^{-2}}{2} \neq 0$. Finalement, il fallait cocher $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-2\})$.
La fonction f est holomorphe sur le compact à bord $\overline{D}(0,1)$ de bord $C(0,1)$ donc $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0$ par le théorème de Cauchy.
Dans le disque $D(0,3)$ la fonction f a exactement un pôle d'ordre 3 en $z=-2$ donc $\displaystyle\int_{C(0,3)^+} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Rés}(f,-2)$ par la formule des résidus. Mais $\mathrm{Rés}(f,-2)$ est exactement le coefficient du terme en $(z+2)^{3-1}$ du développement en série entière en $z=-2$ de $g(z) = (z+2)^3 f(z) = \frac{e^z-1}{z}$. On fait un développement limité à l'ordre 2 par rapport à $(z+2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{e^z-1}{z} &= \frac{e^{-2+z+2}-1}{-2+z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}}(e^{-2}e^{z+2}-1) \\
&= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z+2) - \frac{1}{8}(z+2)^2 + o((z+2)^2)\right)\left(e^{-2} - 1 + e^{-2}(z+2) + \frac{e^{-2}}{2}(z+2)^2 + o((z+2)^2)\right) \\
&= \frac{1-e^{-2}}{2} + \frac{1-3e^{-2}}{4}(z+2) + \frac{1-5e^{-2}}{8}(z+2)^2 + o((z+2)^2),
\end{aligned}$$

d'où $\text{Rés}(f,-2) = \dfrac{1-5e^{-2}}{8}$ et finalement $\displaystyle\int_{C(0,3)^+} f(z)dz = \frac{\pi}{4}(1-5e^{-2})i$.

8. On a $\dfrac{1}{6-z} = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1-z/6} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{6^{n+1}}$. Comme $\left(\dfrac{1}{6-z}\right)' = \dfrac{1}{(6-z)^2}$, on en déduit le développement en série entière demandé en $z=0$ en dérivant le développement précédent : $\dfrac{1}{(6-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{6^{n+1}} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{6^{n+2}} z^n$.

9. $R=6$. Cela se voit directement sur la série entière ou en remarquant que $D(0,6)$ est le plus grand disque centré en 0 et contenu dans le domaine d'holomorphie $\mathbb{C}\setminus\{6\}$ de $\dfrac{1}{(6-z)^2}$.

10. L'intégrale demandée est du type 2 du cours avec une fraction rationnelle sans pôle réel et de degré inférieur ou égal à -2. On pose $R(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+(z+3)^2} = \dfrac{e^{iz}}{(z+3-i)(z+3+i)}$ qui a deux pôles $-3+i$ et $-3-i$ d'ordre 1 mais seul $-3+i$ est au-dessus de l'axe des abscisses. On a donc que l'intégrale vaut $2\pi i\,\text{Rés}(R,-3+i) = 2\pi i\ (z+3-i)\dfrac{e^{iz}}{(z+3-i)(z+3+i)}\Big|_{z=-3+i} = \pi e^{-1-3i}$. On pouvait aussi utiliser les transformées de Fourier en remarquant que l'intégrale vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i(\frac{1}{-2\pi})x}}{1+(x+3)^2}dx = \widehat{\frac{1}{1+(x+3)^2}}\Big|_{\xi=-\frac{1}{2\pi}} = \pi e^{-1-3i}$, en utilisant la question 4.