INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

3GM – 2014-2015

Examen du cours d'EDO et modélisation

Mardi 16 décembre 2014 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours, TD, TP personnelles manuscrites, les papiers imprimés distribués en cours, TD et TP.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.
Partage du temps conseillé : 45'–1h pour l'exercice 1, 1h–1h15 pour l'exercice 2.

Exercice 1. On considère l'EDO scalaire

$$y'(t) = \alpha + y(t)^2, \qquad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ paramètre fixé.

1.1. Prouver que, pour toute donnée $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, l'équation admet une unique solution maximale.

1.2. Cas $\underline{\alpha = 0}$. Démontrer que l'EDO a un unique point stationnaire. Résoudre l'EDO et tracer l'allure des solutions. Le point stationnaire est-il stable ou instable ?

1.3. Cas $\underline{\alpha > 0}$. L'équation a-t-elle un point stationnaire ? Résoudre l'EDO et tracer l'allure des solutions (prendre $\alpha = 1$ pour simplifier).

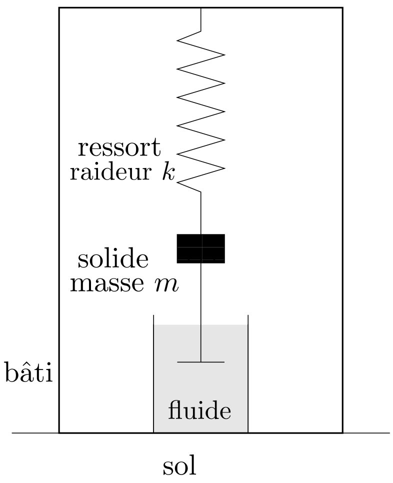
1.4. Cas $\underline{\alpha < 0}$. Trouver les points stationnaires. Résoudre l'EDO et tracer l'allure des solutions (prendre $\alpha = -1$ pour simplifier). Les points stationnaires sont-ils stables ou instables ?

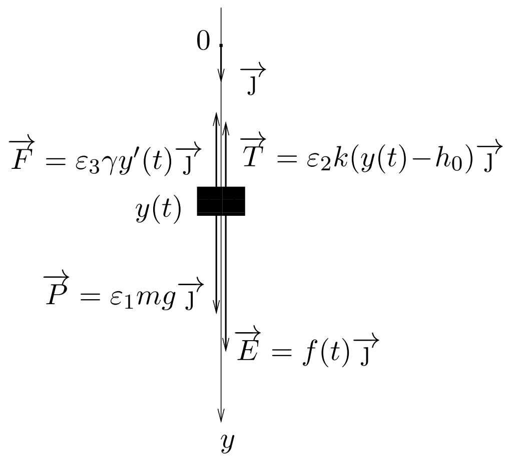
Remarque : la nature des points stationnaires peut être justifiée à partir des dessins.

Exercice 2. La figure sur la page suivante représente un modèle simplifié de sismographe qui est constitué d'un solide de masse m suspendu l'extrémité d'un ressort de raideur $k > 0$ (et de masse négligeable) fixé à un bâti rigide solidaire du sol en vibration. Ce solide est lié à un amortisseur exerçant sur celui-ci une force de frottement fluide proportionnelle et opposée à la vitesse (on notera $\gamma > 0$ la constante de proportionnalité). On suppose que le sol a un mouvement oscillant vertical d'amplitude $f(t)$ qui entraîne un mouvement vertical du solide qui est mesuré. On note $y(t)$ l'altitude du solide en fonction du temps sur un axe $(0y)$ orienté *vers le bas* et dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{j}$. L'origine correspond à l'état d'équilibre du système avec masse en l'absence de vibrations. L'abscisse h_0 correspond à l'élongation du ressort au repos sans masse m suspendue. La constante de gravitation est $g > 0$ et, sur le dessin qui suit, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ représentent des constantes égales à ± 1.

Les questions 2.6, 2.7 et 2.8 sont indépendantes.

Tourner la page SVP





2.1. Déterminer les constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, +1\}$.

2.2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, écrire l'équation du mouvement sous la forme $y''(t) + by'(t) + c(y(t) - h_0) = d + e\,f(t)$ en donnant les valeurs des constantes b, c, d, e.

2.3. Trouver une relation entre c, h_0 et d et en déduire que l'équation se simplifie en

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = e\,f(t). \tag{1}$$

On pourra considérer le système en l'absence de vibrations de sol ($f \equiv 0$) et à l'équilibre.

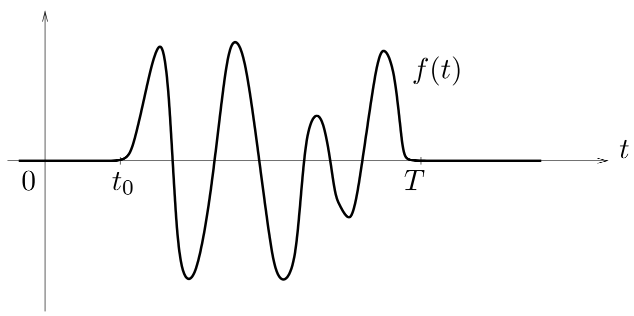
2.4. Quel est l'intérêt de la présence de l'amortisseur fluide pour un sismographe ?

2.5. Écrire l'équation (1) sous la forme d'un système différentiel du 1er ordre. On suppose que $f(t)$ est une fonction C^1 bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour toutes données initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$, l'EDO (1) a une unique solution globale.

2.6. On suppose dans cette question que que $b = 2$, $c = 2$, $e = 1$ et $f(t) = \sin(2t)$ et donc l'équation (1) devient $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \sin(2t)$. Trouver la solution générale de cette équation.

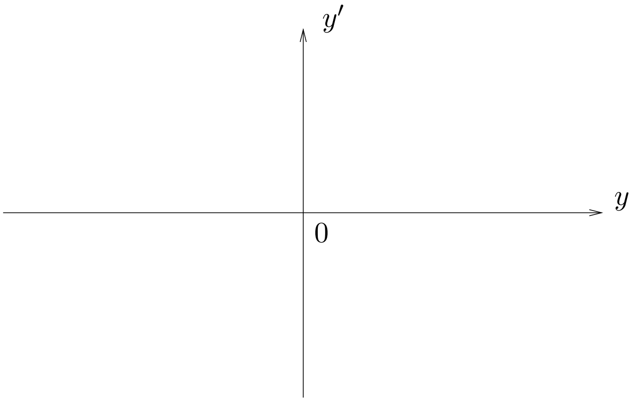
2.7. Que se passe-t-il sans amortisseur ($b = 0$) si $f(t) = \sin(\sqrt{2}t)$? (en prenant toujours $c = 2$ et $e = 1$).

2.8. On reprend le sismographe modélisé par l'équation (1) en supposant qu'il est au repos et subit une secousse connue et donnée par la fonction $f(t)$ dont l'allure est représentée sur la figure ci-dessous.



Tourner la page SVP

Dessiner, sans calcul, l'allure du portrait de phase de la solution dans le plan $(y(t), y'(t))$ (voir figure ci-dessous).



Remarques :

– *une secousse sismique ne donne sans doute pas une fonction $f(t)$ très régulière. Ici, pour simplifier, on suppose toujours que f est C^1 par exemple ;*

– *attention : le système n'est pas autonome et donc les trajectoires peuvent se croiser sur le portrait de phase en $(y(t), y'(t))$ sans qu'il n'y ait de contradiction à l'unicité. Pour être sûr qu'elles ne se croisent pas, il faudrait tracer les trajectoires dans $(t, y(t), y'(t)) \in \mathbb{R}^3$.*

FIN