Année universitaire 2015-2016
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mardi 22 mars 2016 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1. On considère un fluide caloporteur parcourant un tube de longueur L de section constante à la vitesse constante $v > 0$. La température moyenne du fluide ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et est notée $u(t, x)$. Ce tube échange avec le milieu extérieur de sorte que l'évolution de la température est modélisée par l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 1 + u(t, x) \qquad 0 < x < L, t > 0. \tag{1}$$

1.1. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $x_0 \in [0, L]$ au temps $t_0 > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.2. Soit $x(t)$ une caractéristique. Écrire l'EDO régissant la variation de u le long de cette caractéristique. Donner la solution générale de cette EDO.

On suppose que la température initiale dans le tube est $u(0, x) = T_0$ pour $0 \leq x \leq L$ et que la température d'entrée du fluide dans le tube est $u(t, 0) = T_0$ pour $t \geq 0$, où T_0 est une température constante donnée.

1.3. Déterminer la température $u(t, x)$ dans le tube pour $0 < x < L$ et $t > 0$.

On suppose maintenant que $\underline{v = 2}$, $\underline{L = 2}$, $\underline{T_0 = 1}$.

1.4. Tracer les graphes

$$\begin{array}{ll} t \mapsto u(t, 2), & t > 0\,; \\ x \mapsto u(\frac{1}{2}, x), & 0 \leq x \leq 2\,; \\ x \mapsto u(1, x), & 0 \leq x \leq 2. \end{array}$$

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère une corde vibrante de longueur L fixée à ses deux extrémités. L'amplitude verticale de la corde à l'abscisse $0 \leq x \leq L$ et au temps $t \geq 0$ est notée $v(t,x)$. À l'équilibre, l'amplitude de la corde est $v = 0$ comme sur la Figure 1. On suppose que l'évolution de l'amplitude de la corde au cours du temps est gouvernée par l'EDP

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) = -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x), \qquad 0 < x < L,\ t > 0. \tag{2}$$

Les questions 2.1 et 2.5 sont indépendantes des autres.

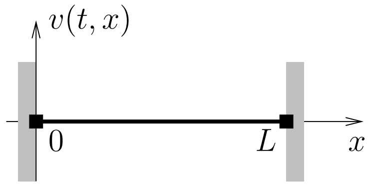

Figure 1 : La corde à l'équilibre

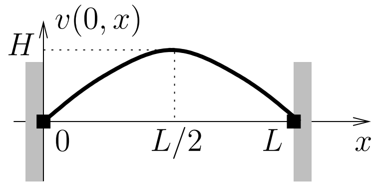

Figure 2 : Forme de la corde à $t = 0$

2.1. On suppose qu'en $t = 0$, la corde a la forme tracée sur la Figure 2. On la lâche sans vitesse initiale. Écrire les 2 conditions aux limites et les 2 conditions initiales qu'il faut rajouter à (2) pour décrire le mouvement de la corde (on supposera que la corde représentée sur la Figure 2 est le graphe d'une fonction f). Décrire qualitativement le mouvement de la corde au cours du temps.

2.2. On cherche une solution de (2) à variables séparées sous la forme $v(t,x) = \phi(x)\psi(t)$. Démontrer que ϕ et ψ satisfont des EDO du second ordre linéaires à coefficients constants de la forme

$$\phi''(x) + a\phi(x) = 0, \tag{3}$$
$$\psi''(t) + b\psi'(t) + c\psi(t) = 0, \tag{4}$$

où a, b, c sont à déterminer en fonction de $\omega^2 = -\dfrac{\phi''(x_0)}{\phi(x_0)} = -\dfrac{\psi''(t_0) + \psi'(t_0)}{\psi(t_0)}$.

2.3. On suppose que ω est un réel strictement plus grand que $1/2$.

2.3.1. Donner la solution générale de (3).

2.3.2. Démontrer que $\psi(t) = e^{-t/2}\left(C\cos(\frac{\delta t}{2}) + D\sin(\frac{\delta t}{2})\right)$ avec C, D constantes réelles et $\delta = \sqrt{4\omega^2 - 1}$, est la solution générale de (4).

2.4. On rajoute à (2) les conditions aux limites

$$v(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{5}$$
$$v(t,L) = 0, \qquad t > 0. \tag{6}$$

Démonter qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant (2)-(5)-(6) de la forme

$$v_k(t,x) = e^{-t/2}\left(C_k\cos(\frac{\delta_k}{2}t) + D_k\sin(\frac{\delta_k}{2}t)\right)\sin(\omega_k x), \qquad k = 1,2,3,... \tag{7}$$

où $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$, $\delta_k = \sqrt{4\omega_k^2 - 1}$ et C_k, D_k sont des constantes réelles.

Tourner la page SVP

2.5. On considère la fonction $v_0 : [0, L] \to \mathbb{R}$ définie par $v_0(x) = \frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L})$. Tracer cette fonction. Déterminer une suite $(\gamma_k)_{k=1,2,\ldots}$ de sorte que

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin(\frac{k\pi}{L} x), \qquad x \in [0, L].$$

[Développer en série de Fourier un prolongement périodique convenable de v_0.]

2.6. On rajoute à (2)-(5)-(6) les conditions initiales

$$v(0, x) = v_0(x), \qquad x \in [0, L], \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = 0, \qquad x \in [0, L]. \tag{9}$$

Trouver la solution du système (2)-(5)-(6)-(8)-(9) sous la forme $v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, t)$.

2.7. Quelle est la limite de $v(t, x)$ quand $t \to +\infty$? Interpréter le résultat physiquement. Que se passerait-il si le terme $-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x)$ n'était pas présent dans l'EDP (2) ?

FIN