INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2016-2017
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mercredi 29 mars 2017 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère un tube horizontal de longueur L dans lequel circule de la gauche vers la droite un fluide compressible dont la masse volumique $u(x,t)$ ne dépend que de l'abscisse $0 \le x \le L$ et du temps t et est régie par l'équation de transport

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (v(x)u(x,t))}{\partial x} = q, \qquad 0 < x < L,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \theta(t), \qquad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{3}$$

La vitesse du fluide $v(x) = \gamma(1+x)$, $\gamma > 0$, la condition d'entrée à gauche dans le tube $\theta(t)$, la condition initiale $u_0(x)$ et la constante $q > 0$ sont données.

1.1. Trouver l'expression de la caractéristique $x(t) = x_{\bar{x},\bar{t}}(t)$ passant par le point $(\bar{t},\bar{x})$ pour $0 \le \bar{t} \le T$, $0 \le \bar{x} \le L$ et représenter les caractéristiques sur un dessin.

1.2. Trouver l'Équation Différentielle Ordinaire qui régit la variation de u le long de la caractéristique $x_{\bar{x},\bar{t}}(t)$.
[On dérivera par rapport au temps la quantité $u(x_{\bar{x},\bar{t}}(t),t)$.]

1.3. Résoudre l'EDP (1)-(2)-(3).
[On donnera la solution dans chacune des zones séparées par la caractéristique critique.]

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{5}$$

$$u(0,t) = \sin(t) \qquad t > 0 \tag{6}$$

$$u(L,t) = 0 \qquad t > 0. \tag{7}$$

2.1. Décrire la situation physique que peut modéliser ce problème.

Pour se ramener à une situation connue, on effectue le changement de fonction inconnue $v(x,t) = u(x,t) - (1 - \frac{x}{L})\sin t$.

2.2. Vérifier que v satisfait la nouvelle équation

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = f(x)g(t) \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{8}$$

$$v(x,0) = v_0(x) \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{9}$$

$$v(0,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{10}$$

$$v(L,t) = 0 \qquad t > 0, \tag{11}$$

en donnant les valeurs de v_0, $f(x)$ et $g(t)$.

On va résoudre (8)-(9)-(10)-(11) en cherchant la solution sous la forme

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t)\sin(\omega_k x) \quad \text{avec } \omega_k = \frac{k\pi}{L}. \tag{12}$$

2.3. Vérifier que la fonction v donnée par (12) satisfait bien les conditions aux limites (10)-(11).

2.4. En développant en série de Fourier un prolongement périodique convenable de la fonction $1 - \frac{x}{L}$, $0 \leq x \leq L$, trouver des b_k, $k \geq 1$, de sorte que

$$1 - \frac{x}{L} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(\omega_k x) \quad \text{pour } 0 < x < L.$$

2.5. En utilisant la question précédente, démontrer que v donnée par (12) est solution de (8) si, pour tout $k \geq 1$, la fonction $\psi_k(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\psi_k'(t) + \omega_k^2 \psi_k(t) = \gamma_k \cos t \tag{13}$$

où on déterminera les γ_k en fonction des b_k précédents puis en fonction de k.

2.6. Trouver la solution générale de (13).
[On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.]

2.7. En exploitant la condition initiale (9), déterminer complètement les $\psi_k(t)$ et donner v. En déduire la solution u de (4)-(5)-(6)-(7).

FIN