Année universitaire 2009-2010
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mardi 23 mars 2010 – durée : 2h (8h–10h)

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscriptes, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1 On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v(t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(u) & 0 \leq x \leq L,\ t > 0, \\ u(0,t) = t & t > 0, \\ u(x,0) = x^2 & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{1}$$

où $L > 0$ est une constante fixée.

On demande de résoudre le système dans les deux cas suivants :

1. $f(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $v(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.

2. $f(r) = -r$ et $v(t) = v$ avec $v > 0$ une constante.

Exercice 2 On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0 & 0 \leq x \leq L,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & t > 0, \\ u(L,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{2}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et $L > 0$ sont des constantes fixées et u_0 est une fonction C^1 par morceaux sur $[0, L]$.

1. Déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ de sorte que, par le changement de fonction inconnue $v(x,t) = e^{\mu t}u(x,t)$, on se ramène à l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Écrire le nouveau système pour v.

Tournez SVP

2. On cherche des solutions de (3) à variables séparées sous la forme $v(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Déterminer la forme générale de ϕ et ψ.

3. Démontrer que si l'on cherche ϕ et ψ de manière à satisfaire les conditions limites, on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $v_k(x,t) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ où $k = 0, 1, 2, \dots$ Donner l'expression des $\phi_k(x), \psi_k(t)$.

4. Trouver la solution du nouveau système en cherchant v sous la forme

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)\psi_k(t).$$

En déduire la solution $u(x,t)$ du système initial (S).

5. Application : on choisit $u_0(x) = \cos(\frac{\pi x}{2L})$. Déterminer $u(x,t)$. Représenter *l'allure* du graphe de u_0 et de la fonction $x \mapsto u(x,t)$ pour un $t > 0$ fixé.

6. Si $c > 0$, déterminer la limite de $u(x,t)$ quand $t \to +\infty$. Expliquer physiquement ce à quoi cela correspond si u représente la température dans une barre de longueur L.

5. Si maintenant $c < -\pi^2/(4L^2)$, quelle est la limite de $u(x,t)$ quand $t \to +\infty$? Est-ce physique ?

FIN