Université de Tours–UE "Récréations mathématiques"–année 2008/09

Examen final

Jeudi 16 avril 2009 – durée 2h

**** Tous documents et appareils électroniques interdits ****

Une réponse sans justification ne rapportera aucun point. Le raisonnement et une rédaction claire et concise seront essentiels dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1. Questions brèves :

1. Il faut 2 ballots de foin pour nourrir 2 éléphants pendant 2 jours. Combien faut-il de ballots de foin pour nourrir 6 éléphants pendant 6 jours ?

2. Donner la négation de la phrase suivante :
Si je décide de ne pas aller à la piscine, alors j'irai au cinéma ou au théâtre.

3. Marcel veut réaliser 27 petits cubes rouges de 1 cm de côté. Pour cela, il prend un cube de bois de 3 cm de côté, le peint en rouge et le débite en 27 petits cubes de taille égale. Une fois son opération réalisée, certains des petits cubes ont déjà une ou plusieurs faces peintes en rouge. Combien reste-t-il de faces à peindre sur les petits cubes ?

4. Un tournoi de tennis commence aux 64 èmes de finale avec 128 joueurs en lice. À la fin du tournoi, combien de matchs ont été joués ?

Exercice 2. Complétez le sudoku suivant :

		6	7	4		2		
7	3			8	9		1	
				7	2			3
1			6	3	8			2
8			5	9				
	1		4	2			9	5
		9		1	6	4		

Tournez la page SVP

Exercice 3. Sur l'île de la certitude, il y a deux catégories d'habitants. Les premiers sont les *ditvrais* (il disent toujours la vérité) et les seconds sont les *ditfaux* (ils mentent systématiquement).

1. Vous débarquez sur cette île et demandez à un habitant s'il est un ditvrai. Que vous répond-il ?

2. Un deuxième habitant arrive et déclare, en désignant le premier : "l'un de nous au moins est un ditfaux". Pouvez en déduire la nature de chacun des deux habitants ?

3. Plus tard, vous rencontrez trois autres habitants ; le premier dit que le second est un ditvrai, et le second déclare que si le premier est un ditvrai, alors le troisième en est aussi un. Pouvez-vous déterminer leur nature ?

Exercice 4. Placer 8 dames sur un échiquier de façon à ce que deux quelconques d'entre elles ne se menacent pas.

[Barème : suivant le nombre de dames que vous avez réussi a placer.]

Exercice 5. Une souris trouve un gros cube de fromage subdivisé en $3 \times 3 \times 3 = 27$ petits cubes de même taille. Elle décide de manger chacun des petits cubes l'un après l'autre. Chaque fois qu'elle a terminé de manger un petit cube, elle s'attaque obligatoirement à un autre petit cube ayant une face commune avec celui qu'elle vient de dévorer. En procédant ainsi, elle se rend compte qu'il est impossible de terminer sa promenade gourmande par le petit cube central.

Pourquoi ?

Barème indicatif : 4 pts par exercice.

EXAMEN FINAL du jeudi 16 avril 2009 : CORRECTION

Une solution de l'exercice 1.

1. – S'il faut 2 ballots de foin pour nourrir 2 éléphants pendant 2 jours, il faut 6 ballots de foin pour nourrir 6 éléphants pendant 2 jours et donc 18 ballots de foin pour nourrir 6 éléphants pendant 6 jours.
– S'il faut 3 ballots de foin pour nourrir 3 éléphants pendant 3 jours, il faut 6 ballots de foin pour nourrir 6 éléphants pendant 3 jours et donc 12 ballots de foin pour nourrir 6 éléphants pendant 6 jours.
2. – La négation de "Si je décide de ne pas aller à la piscine, alors j'irai au cinéma ou au théâtre" est *Je décide de ne pas aller à la piscine et pourtant je n'irai ni au cinéma ni au théâtre.*
– La négation de "Si je décide d'aller à la piscine, alors je n'irai ni au cinéma ni au théâtre" est *Je décide d'aller à la piscine et pourtant j'irai au cinéma ou au théâtre.*
3. – Les 27 petits cubes ont au total $27 \times 6 = 162$ faces. Avant que le gros cube ne soit débité, il y avait $9 \times 6 = 54$ petites faces apparentes qui ont été peintes en rouge. Il reste donc à peindre $162 - 54 = 108$ petites faces.
– Les 64 petits cubes ont au total $64 \times 6 = 384$ faces. Avant que le gros cube ne soit débité, il y avait $16 \times 6 = 96$ petites faces apparentes qui ont été peintes en jaune. Il reste donc à peindre $384 - 96 = 288$ petites faces.
4. On peut faire un arbre, compter combien de matchs ont lieu à chaque étape de la compétition et les additionner. Mais il y a plus simple : si le tournoi engage n joueurs, si après chaque match le perdant est éliminé et s'il y a un seul vainqueur à la fin, alors le nombre total de matchs est tout simplement $n - 1$. Si le tournoi démarre en 64èmes avec 128 joueurs, 127 matchs seront joués et s'il démarre en 32èmes avec 64 joueurs, 63 matchs seront joués.

Une solution de l'exercice 2.

5	8	6	7	4	1	2	3	9
2	9	1	3	6	5	7	8	4
7	3	4	2	8	9	5	1	6
9	6	5	1	7	2	8	4	3
1	4	7	6	3	8	9	5	2
8	2	3	5	9	4	6	7	1
6	1	8	4	2	7	3	9	5
4	7	2	9	5	3	1	6	8
3	5	9	8	1	6	4	2	7

7	1	8	9	6	3	4	5	2
4	2	3	5	8	7	9	1	6
9	5	6	4	1	2	7	3	8
2	8	7	3	9	4	1	6	5
3	6	9	8	5	1	2	7	4
1	4	5	7	2	6	8	9	3
8	3	1	6	4	9	5	2	7
6	9	4	2	7	5	3	8	1
5	7	2	1	3	8	6	4	9

Une solution de l'exercice 3.

1. Il va nécessairement vous répondre qu'il est un ditvrai (ou veriti). En effet, soit c'en est un et donc il dira la vérité, soit c'est un ditfaux (ou falsi) et il mentira en disant le contraire de ce qu'il est.
2. L'habitant qui arrive ne peut pas mentir ! En effet, s'il ment, c'est que c'est un ditfaux (ou falsi) et donc son affirmation est vraie (au moins un des deux, lui, est un ditfaux ou falsi) ce qui est contradictoire. Donc ce deuxième habitant est un ditvrai ou veriti ; comme il dit la vérité, le premier habitant est nécessairement un ditfaux ou falsi.
3. Appelons A le premier habitant, B le deuxième et C le troisième. On étudie deux cas : 1. A dit la vérité ; 2. A ment. Dans le cas 1, d'après la déclaration de A (qui dit la vérité), on a que B dit également la vérité ce qui entraine que C dit également la vérité. Dans ce cas, on en déduit que A, B et C sont des ditvrais (ou veritis). Dans le cas 2, A ment donc le contraire de ce qu'il dit est vrai, c'est-à-dire que B ment. Le contraire de l'affirmation de B est "A dit la vérité et C ment"; c'est bien sûr contradictoire avec le fait que A ment. Ce cas n'est donc pas possible. En conclusion, on est dans le cas 1 : A, B et C sont des ditvrais (ou veritis).

Solution de l'exercice 4. Il y a 92 configurations possibles. En voici deux ci-dessous.

					D		
			D				
						D	
D							
		D					
				D			
	D						
							D

			D				
						D	
		D					
							D
	D						
				D			
D							
					D		

Solution de l'exercice 5. Colorons les petits cubes de fromage avec deux couleurs, noir et blanc, de façon à ce que deux petits cubes ayant une face en commun soient de couleurs différentes. Supposons que le cube du milieu soit noir. On a donc 13 petits cubes noirs et 14 petits cubes blancs. La souris mangera successivement des petits cubes de couleur différente (puisqu'elle passe d'un petit cube à un autre ayant une face en commun avec celui qu'elle vient de dévorer). Il suffit donc de démontrer qu'il est impossible à la souris de terminer son parcours gastronomique avec un cube noir. En effet :
– si elle commence par un cube noir, en alternant noir-blanc et en terminant par un cube noir, elle mangera au total plus de cubes noirs que de blancs, ce qui est impossible.
– si elle commence par un cube blanc et termine par un noir en alternant blanc-noir, elle mangera alors un nombre pair de cubes, ce qui est encore impossible car il y a un nombre impair de cubes au total.