Examen du cours “Contrôle Optimal”

Mardi 30 janvier 2018 – durée : 3h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'EDO contrôlée

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \quad 0 \le t_0 < t < T, \\ x_2'(t) = -x_1(t) - x_2^3(t) + (1 + x_1(t))u(t), \\ x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}$ est la variable de contrôle.
On suppose que T est un horizon fini, que l'état final $(x_1(T), x_2(T))$ est libre et que la fonction coût est donnée par

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} (\exp(x_1^2(s)) + x_2^2(s) + u^2(s))ds.$$

1.1. Écrire le principe du maximum de Pontryagin.
[Donner le Hamiltonien de Pontryagin $\hat{H}$, les EDO satisfaites par la trajectoire optimale $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ et l'état adjoint $P^* = (p_1^*, p_2^*)$, la condition finale $P^*(T)$ et le problème d'optimisation permettant de calculer le contrôle optimal u^*.]

1.2. En déduire l'expression du contrôle optimal u^* en fonction de P^* et X^*.

1.3. Que peut-on dire du Hamiltonien $\hat{H}$ au point optimal (X^*, u^*, P^*)?

1.4. Linéariser (4) autour de $(x_1^{(e)}, x_2^{(e)}, u^{(e)}) = (0, 0, 0)$ et montrer que le système linarisé, vérifié par $y_1 = x_1 - x_1^{(e)}$, $y_2 = x_2 - x_2^{(e)}$, $v = u - u^{(e)}$ est donné par

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \quad 0 \le t_0 < t < T, \\ y_2'(t) = -y_1(t) + v(t), \\ y_1(t_0) = y_2(t_0) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

où $v(t) \in \mathbb{R}$ est la variable de contrôle.

1.5. Le système (2) est-il stable?

1.6. Donner la loi de commande par retour d'état (loi de feedback optimal) pour le système linéarisé avec la fonction coût

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} (y_2^2(s) + v^2(s))ds. \tag{3}$$

2.7. Que se passe-t-il maintenant si on considère un problème en horizon infini ? C'est-à-dire qu'on suppose que le coût (3) est remplacé par

$$J_\infty = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} (y_2^2(s) + v^2(s))ds.$$

Exercice 2. Soit l'EDO contrôlée

$$\begin{cases} y'(s) = y(s) + u(s), \quad 0 \leq s < t < T, \\ y(0) = x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle, et le problème de contrôle optimal

$$V(x,t) = \inf_{u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R})} \int_0^t |u(s)|^2 ds + y(t). \tag{5}$$

2.1. Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman que satisfait la fonction valeur V dans $\mathbb{R} \times [0,T)$.

2.2. Trouver une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman sous la forme $V(x,t) = b(t)x + c(t)$.

[On calculera explicitement les fonctions $b, c : [0,T] \to \mathbb{R}$.]

2.3. En déduire, pour tous $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T)$, un contrôle optimal $\alpha^*(s)$ et la trajectoire optimale $y^*(s)$ associés au problème (5).

[Trouver $S(z,s) \in \operatorname{argmax}_{\alpha \in \mathbb{R}^n}\{-(z+\alpha)\frac{\partial V}{\partial x}(z, t-s) - |\alpha|^2\}$ puis résoudre l'EDO $y'(s) = y(s) + S(y(s),s)$ avec $y(0) = x$. La trajectoire optimale est alors l'unique solution $y^*(s)$ de cette EDO avec $\alpha^*(s) = S(y^*(s),s)$ comme contrôle optimal.]