Examen de rattrapage

Jeudi 11 juin 2009 – durée 2h

**** Tous documents et appareils électroniques interdits ****

Une réponse sans justification ne rapportera aucun point. Le raisonnement et une rédaction claire et concise seront essentiels dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1. Questions brèves :

1. Au sujet des nouvelles plaques minéralogiques, on peut lire sur le site du ministère : “le numéro se compose d'une suite de 2 lettres, suivies d'un tiret, de trois chiffres, d'un tiret et de 2 lettres.” Combien de plaques différentes peut-il exister ?

2. Dans un tournoi de pétanque, le règlement stipule que chaque équipe doit obligatoirement participer au troisième et dernier tour et au moins à l'un des deux premiers tours. Une équipe doit payer 15 Euros pour jouer deux tours et 20 Euros pour participer aux trois tours. Les organisateurs notent que 40 équipes ont participé au tour 1, 34 équipes au tour 2 et 46 équipes au tour 3. Combien les organisateurs ont-ils récolté de frais d'inscription ?

3. Aristide plante des nénuphars dans sa mare et se rend compte que cette variété pousse très vite : tous les 2 jours, la surface occupée par les nénuphars sur la mare double si bien qu'au bout de 12 jours, la mare est complètement recouverte. Au bout de combien de jours, au moins la moitié de la mare était-elle couverte ?

4. La TVA dans la restauration représente actuellement 19,6 % du montant de la note. Si elle baisse à 5,5 % et les restaurateurs répercutent intégralement cette baisse sur leurs prix, de combien baissera environ un menu qui était affiché à 10 Euros ?

Exercice 2. On considère 4 phrases qu'on nomme A, B, C et D.

Éléonore déclare les 3 choses suivantes :
1. Des 3 phrases A, B, C, une est vraie et les deux autres sont fausses.
2. Des 3 phrases B, C, D, une est vraie et les deux autres sont fausses.
3. Des 2 phrases A, D, une est vraie et l'autre est fausse.

Félix déclare quant à lui :
4. Des 3 phrases A, B, C, une est vraie et les deux autres sont fausses.
5. Des 3 phrases B, C, D, une est vraie et les deux autres sont fausses.
6. Des 3 phrases A, C, D, une est vraie et les deux autres sont fausses.

Sachant que l'un des deux dit la vérité et l'autre ment au moins une fois, déterminer quelles sont les phrases qui sont vraies et celles qui sont fausses.

Tournez la page SVP

Exercice 3.

1. Quel est le plus petit nombre entier dont le produit des chiffres est égal à 420 ?

2. Pourquoi n'existe-t-il pas de nombres entiers dont le produit des chiffres est égal à 374 ?

3. Pourquoi ne demande-t-on pas de trouver le plus *grand* nombre entier dont le produit des chiffres est 420 dans la question 1 ?

Exercice 4. Placer 8 dames sur un échiquier de façon à ce que deux quelconques d'entre elles ne se menacent pas.

[Barème : suivant le nombre de dames que vous avez réussi a placer.]

Exercice 5. Un groupe de faucheurs avait pour mission de faucher deux champs d'OGM. L'un des champs, le grand, avait une surface double par rapport à l'autre, le petit. Durant une moitié de la journée, le groupe fauchait une partie du grand champ. Le groupe se divisait ensuite en deux, une moitié terminant de faucher le grand champ pendant que l'autre moitié s'attaquait au petit champ. À la fin de la journée, le grand champ était fauché mais il restait un morceau du petit à faucher. Le lendemain un des faucheurs terminait le travail en une journée.

Combien y avait-il de faucheurs dans l'équipe ?

Barème : environ 4 pts par exercice.

Université de Tours–UE “Récréations mathématiques”–année 2008/09

EXAMEN DE RATTRAPAGE du jeudi 11 juin 2009 : CORRECTION

Une solution de l’exercice 1.
1. Nombre de plaques possibles (sachant qu’il y a 26 lettres dans l’alphabet et 10 chiffres): $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 456\,976\,000$.
2. Comme chaque équipe doit participer au 3ème tour, on sait qu’il y a 46 équipes qui ont participé au tournoi au total. Sur ces 46 équipes, 40 ont participé au premier tour. Il y en a donc $46 - 40 = 6$ qui n’ont participé qu’au 2ème tour. De même, comme 34 ont partipé au 2ème tour, $46 - 34 = 12$ n’ont participé qu’au 1er tour. Ainsi $6 + 12 = 18$ équipe se sont contentées de ne participer qu’à un seul des tours préliminaires. Les $46 - 18 = 28$ équipes restantes ont participé à tous les tours. Les organisateurs ont donc récolté $18 \times 15 + 28 \times 20 = 830$ Euros.
3. Au bout du 10ème jour, la moitié de la surface de la mare au moins était courverte de nénuphars, puisque 2 jours plus tard, la surface de nénuphars a doublé couvrant toute la mare.
4. Quand on paie 10 Euros avec une TVA à 19,6 %, on paie 1,96 Euros de taxes et 8,04 Euros au restaurateur. Avec une TVA à 5,5 %, les 8,04 Euros du restaurateur deviennent 94,5 % du prix à payer donc le nouveau prix du menu est de $8,04 \times 100/94,5 \approx 8,5$ Euros soit une baisse de 1,5 Euros environ.

Une solution de l’exercice 2. Supposons tout d’abord que Éléonore (E) dit la vérité. Si A est vraie alors d’après 1, B et C sont fausses. Donc d’après 2, D doit être vraie. Ainsi A et D seraient vraies ce qui est contradictoire avec 3. On en déduit que A est fausse. D’après 1, on a donc que soit B, soit C est vraie. Ainsi, d’après 2, D est nécessairement fausse. On aboutit à A et D fausses ce qui est contradictoire avec 3. Finalement E ment au moins une fois et donc Félix (F) dit la vérité.
Étudions les déclarations de F. Si A est vraie, B et C sont fausses par 4. Ainsi D est vraie par 5. On aurait que A et D sont vraies ce qui est contradictoire avec 6. Ainsi A est fausse. Si B est vraie alors C est fausse par 4 et D est fausse par 5. Ainsi A, C, D sont fausses ce qui est contradictoire avec 6. On en déduit donc que A et B sont fausses. Donc C est vraie par 4. D’où D est fausse par 5. La déclaration 6 est correcte (A et D fausses et C vraie). On vérifie alors que 1 et 2 sont correctes (ce sont les mêmes que 4 et 5) mais que 3 est contradictoire (ce qui n’est pas gênant car on sait que E ment au moins une fois).

Une solution de l’exercice 3.
1. Soit N le nombre recherché. On décompose 420 en produit de nombres premiers : $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Pour être le plus petit possible, N doit comporter le moins de chiffres possibles. Comme $2 \times 2 = 4$ et $2 \times 3 = 6$ (nombres à 1 chiffre alors que tous les autres produits des facteurs de 420 font des nombres à au moins 2 chiffres), N est à 4 chiffres et est composé soit des chiffres 4,3,5,7 ou des chiffres 2,6,5,7 (leur produit fait 420 et il est impossible de trouver d’autres combinaisons de 4 chiffres –ou de moins de 4 chiffres– faisant aussi 420). On en déduit que $N = 2567$.
2. On remarque que $374 = 2 \times 11 \times 17$ ne peut pas s’écrire comme un produit de chiffres, il est donc impossible que le produit des chiffres d’un nombre entier soit égal à 374.
3. Si on prend un nombre entier dont le produit de ses chiffres est égal à 420 (par exemple 2567), on remarque que tout autre nombre entier formé des mêmes chiffres et d’un nombre arbitraire de 1 (par exemple 25671 ou 121516171 ou 25671111111, etc.) vérifie la même propriété. Ainsi, on peut trouver des nombres aussi grand que l’on veut dont le produit des chiffres est égal à 420. Il n’en existe donc pas de *plus grand*.

Solution de l’exercice 4. Il y a 92 configurations possibles. En voici deux ci-dessous.

					D		
			D				
						D	
D							
		D					
				D			
	D						
							D

			D				
						D	
		D					
							D
	D						
				D			
D							
					D		

Solution de l’exercice 5. Il faut bien entendu supposer que tous les faucheurs ont environ le même rendement, c’est-à-dire qu’il fauchent environ chacun a m^2 par demi-journée (peut importe ce que vaut a). Soit N le nombre de faucheurs (c’est le nombre recherché).
Pour faucher le grand champ, il a fallu une demi-journée de travail de N faucheurs et une demi-journée de travail de $N/2$ faucheurs c’est-à-dire que $a \times N + a \times N/2 = 3aN/2$ m^2 ont été fauchés. Pour faucher le petit champ, il a fallu une demi-journée de travail de $N/2$ faucheurs et deux demi-journées de travail de 1 faucheur c’est-à-dire que $a \times N/2 + a + a = a(N/2 + 2)$ m^2 ont été fauchés. Comme le grand champ a une surface double du petit, on a que $3aN/2 = 2 \times a(N/2 + 2)$ on en déduit $N = 8$.