INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

3GM – 2016-2017

Examen du cours "EDO et modélisation"

Jeudi 3 novembre 2016 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.
Partage du temps conseillé : 45'–1h pour l'exercice 1, 1h–1h15 pour l'exercice 2.

Exercice 1. On considère l'EDO

$$y'(t) = 2\,t\,y(t)^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.1. Prouver que, pour toute donnée $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale (J, y) où $J =]\alpha, \beta[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0.

1.2. Montrer que $t \mapsto y(t)$ est décroissante sur $J \cap]-\infty, 0]$ et croissante sur $J \cap [0, +\infty[$.

1.3. Supposons que y soit définie sur un intervalle de la forme $]-a, a[\subset J$. Démontrer que y est paire sur $]-a, a[$.

1.4. Résoudre explicitement l'EDO.
[On séparera les cas $y_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$.]

1.5. Tracer l'allure des solutions pour différentes données (t_0, y_0) sur le même dessin.
[Distinguer les cas $y_0 = 0$, $y_0 > 0$ et $y_0 < 0$.]

Exercice 2. On considère l'évolution en fonction du temps de deux espèces en compétition pour leur nourriture qui est supposée être exactement la même. On suppose que les deux espèces sont très proches (donc que leurs évolutions en l'absence de l'autre sont essentiellement les mêmes), qu'elles n'ont pas de prédateurs et que l'évolution de chaque population en présence de l'autre n'est dépendante que de la nourriture disponible en quantité limitée. En notant $x(t)$ et $y(t)$ la population de chacune des deux espèces, on aboutit au modèle suivant :

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2 - \alpha xy \\ y' = cy - dy^2 - \beta xy, \end{cases}$$

où $a, b, c, d, \alpha, \beta$ sont des constantes positives.

Les 5 questions sont largement indépendantes et on pourra s'inspirer et utiliser de ce qui a été fait en cours/TD sur l'équation logistique et le modèle de Lotka-Volterra.

2.1. Donner brièvement l'interprétation qualitative de a, b, α. Avec les hypothèses ci-dessus, quelle est la relation entre a et c d'une part et b et d d'autre part ? Comment interpréter la compétition entre les deux espèces quand $\alpha > \beta$?

Dans toute la suite, on supposera pour simplifier que $\underline{a = b = c = d = 1}$.

2.2. Démontrer que, pour toute donnée initiale $(x_0, y_0) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$, il existe une unique solution maximale $(]a, b[, (x(t), y(t)))$, $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - \alpha xy \\ y' = y - y^2 - \beta xy, \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

On admettra que la solution est globale à droite (c'est-à-dire $b = +\infty$).

2.3. (Évolution de l'espèce x en l'absence de y). Tracer le portrait de phase de l'évolution de x en l'absence de y (quand $\alpha = 0$ dans (1)). Interpréter brièvement le dessin obtenu. *[On reproduira la Figure 1 complétée ; on pourra s'inspirer de ce qui a été fait en cours pour l'équation logistique sans reproduire les démonstrations et les calculs. On rappelera quels sont les points d'équilibre et s'ils sont stables ou instables.]*

Figure 1

2.4. (Faible compétition). Dans cette question, on suppose que $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ dans (1).
2.4.1 Trouver les points d'équilibre et tracer le portrait de phase du système.
[Pour étudier la stabilité des points d'équilibre et l'allure du portrait de phase au voisinage de chacun de ces points, on justifiera qu'on peut appliquer le théorème d'Hartman-Grobman et on s'aidera du formulaire sur les systèmes linéaires en dimension 2 pour compléter la Figure 2 sur votre copie].
2.4.2 Interpréter le portrait de phase. Que peut-on dire au sujet de l'évolution des espèces ? Quel nom donneriez-vous à la situation qui se profile pour des temps grands ?

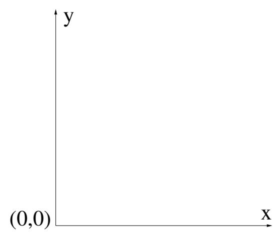

Figure 2

2.5. (Invasion). Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2, \beta = \frac{1}{4}$ dans (1).
2.5.1 Trouver les points d'équilibre et tracer le portrait de phase du système.
[On ne gardera que les points d'équilibre dans $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$. *Pour étudier la stabilité des points d'équilibre et l'allure du portrait de phase au voisinage de chacun de ces points, on justifiera qu'on peut appliquer le théorème d'Hartman-Grobman et on s'aidera du formulaire sur les systèmes linéaires en dimension 2 pour compléter la Figure 2 sur votre copie].*
2.5.2 Interpréter le portrait de phase en supposant que l'espèce x est une espèce locale et l'espèce y une espèce exotique qui a été introduite dans l'écosystème (par exemple l'écrevisse européenne et l'écrevisse américaine). Que se passe-t-il et quel nom donneriez-vous à la situation qui se profile pour des temps grands ?