INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

3GM – 2017-2018

Examen du cours “EDO et modélisation”

Mardi 7 novembre 2017 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.

Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. Le but de l'exercice est d'étudier le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2y(z-1) \\ y' = -x(z-1) \\ z' = -z^3 \end{cases} \tag{1}$$

1.1. Étudier rapidement l'équation scalaire $z' = -z^3$ dans $\mathbb{R}$: prouver que pour toute donnée initiale (t_0, z_0), il existe une unique solution maximale. Tracer l'allure des solutions dans le plan (t, z). Tracer le portrait de phase dans $\mathbb{R}$ (inutile de calculer explicitement les solutions).

1.2. Étudier rapidement le système linéaire $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = x \end{cases}$. Tracer le portrait de phase dans $\mathbb{R}^2$.

1.3. Démontrer que, pour tout donnée initiale (t_0, Y_0) avec $Y_0 = (x_0, y_0, z_0)$, le système (1) admet une unique solution maximale.

1.4. Chercher les éventuels points d'équilibre.

1.5. Linéariser le système au voisinage de $(0, 0, 0)$. Identifier les valeurs propres. Peut-on conclure quant à la stabilité ?

1.6. On pose $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ (non uniques) tels que V soit une fonction de Lyapunov pour $(0, 0, 0)$ définie sur $\mathbb{R}^3$. Conclure quant à la stabilité de $(0, 0, 0)$. Obtient-on la stabilité asymptotique ? Déduire de l'existence de la fonction de Lyapunov que les solutions de (1) sont globales à droite.

1.7. Démontrer que l'axe des z est invariant par le système (1) (c'est-à-dire que si $Y_0 = (0, 0, z_0)$ alors $Y(t) = (0, 0, z(t))$ pour $t \geq t_0$). Tracer le portrait de phase sur l'axe des z (utiliser la question 1.1).

1.8. Démontrer que le plan $z = 0$ est invariant par le système (1) (c'est-à-dire que si $Y_0 = (x_0, y_0, 0)$ alors $Y(t) = (x(t), y(t), 0)$ pour $t \geq t_0$). Tracer le portrait de phase sur le plan $z = 0$ (utiliser la question 1.2).

1.9. Soit $Y(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la solution de (1) démarrant de $(t_0, (x_0, y_0, z_0))$. Démontrer que la quantité $\frac{1}{2}x(t)^2 + y(t)^2$ est constante au cours du temps.

1.10. S'inspirer des questions 1.7, 1.8 et 1.9 pour proposer l'allure du portrait de phase de (1) dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (le wagon fusée) Un wagon de masse m muni d'un réacteur à chaque extrémité se déplace sur une portion de rails droits sans frottement. La position du centre de masse du wagon au temps t est notée $x(t)$ et sa vitesse $v(t) = x'(t)$. Lorsqu'un réacteur est allumé, une force F est appliquée au wagon (dirigée vers la droite quand le réacteur gauche est allumé et vers la droite quand le réacteur droit est allumé), cf. Figure 1.

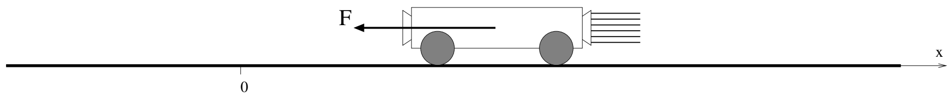

Figure 1

Le mouvement du wagon est modélisé par le principe fondamental de la dynamique

$$mx''(t) = \epsilon F$$

où $\epsilon = 0, +1, -1$ selon que les réacteurs sont éteints, que le gauche ou le droit est allumé.

2.1. Écrire l'équation qui régit le mouvement du wagon sous la forme d'une ODE du 1er ordre autonome sous forme résolue

$$Y'(t) = MY(t) + N, \tag{2}$$

où $Y(t) = (x(t), v(t))$, M est une matrice 2×2 et N un vecteur colonne 2×1.

2.2. Expliquer pourquoi, pour toute donnée initiale $(t_0, Y_0) = (t_0, (x_0, v_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, l'ODE (2) a une unique solution globale.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on prendra $\underline{m = 1}$ et $\underline{F = 1}$.

2.3. Dans chacun des 3 cas suivants, écrire la solution de (2) associée à la donnée initiale $Y_0 = (x_0, v_0)$, représenter le portrait de phase de l'ODE dans le plan (x, v) et préciser les éventuels points d'équilibre ainsi que leur stabilité :
<u>Cas 1</u> : $\epsilon = 0$ (les réacteurs sont éteints);
<u>Cas 2</u> : $\epsilon = 1$ (le réacteur de gauche est allumé);
<u>Cas 3</u> : $\epsilon = -1$ (le réacteur de droite est allumé).
[Indication : dans les cas 2 et 3, on écrira une équation simple entre x', v et v' pour en déduire x en fonction de v.]

2.4. Refaire un quatrième dessin où vous superposerez les portraits de phase obtenus dans les cas 2 et 3 de la question précédente. Partant d'une donnée initiale $Y_0 = (x_0, v_0)$ avec $x_0 > 0$ et $v_0 > 0$, décrire une stratégie d'allumage des réacteurs amenant le wagon à l'origine $x = 0$ avec une vitesse v nulle. Représenter la trajectoire sur le dessin et décrire qualitativement le mouvement du wagon.
[*Indication : il suffit d'allumer successivement un des réacteurs puis l'autre. On ne demande aucun calcul.*]