Examen du cours “EDO et modélisation”

Jeudi 14 octobre 2021 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents distribués dans le cadre de ce cours (polycopié et notes de cours). Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Partage du temps conseillé : 30'–45' pour l'exercice 1, 1h15–1h30 pour l'exercice 2.

Exercice 1. On considère l'EDO

$$y'' + \frac{2}{t}y' + \omega^2 y = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

où $\omega \neq 0$ est un réel fixé.

1.1. Trouver la solution générale de l'EDO (1) sur $]0, +\infty[$ faisant le changement de fonction inconnue $z(t) = ty(t)$.

1.2. Démontrer qu'il existe une unique solution y_+ sur $]0, +\infty[$ telle que $y_+(t) \to 1$ quand $t \to 0^+$.

1.3. Soit $y(t)$ une solution de l'EDO (1) sur $]-\infty, 0[$. Quelle est l'EDO satisfaite par $u(t) = y(-t)$ sur $]0, +\infty[$? En déduire qu'il existe une unique solution y_- de l'EDO (1) sur $]-\infty, 0[$ qui tend vers 1 quand $t \to 0^-$.

1.4. Tracer l'allure de la fonction y égale à y_- sur $]-\infty, 0[$ et à y_+ sur $]0, +\infty[$, prolongée par continuité en 0.

Exercice 2. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - 2x(t)y^2(t), \\ y'(t) = 1 - 2x^2(t)y(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Les questions de cet exercice sont pour la plupart indépendantes et il est possible de traiter des questions en admettant les résultats des questions précédentes.

2.1. Prouver que, pour toutes données $(t_0, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, l'EDO (2) admet une unique solution maximale $(J, (x, y))$.

2.2. On prend $t_0 = 0$, on considère la solution $(J, (x, y))$ associée à la donnée $(0, (x_0, y_0))$ et on note $[0, T[= J \cap [0, +\infty)$. Le but de la question est de prouver que la solution est globale à droite, c'est-à-dire que $T = +\infty$.

Tournez svp

Pour cela on pose, pour tout $t \in [0, T[$, $D(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t))$.

2.2.1. Démontrer que, pour $t \in [0, T[$, $D'(t) \leq x(t)+y(t)$ puis que $D'(t) \leq D(t)+1$.

2.2.2. En utilisant l'inégalité précédente, prouver que $g(t) = (D(t) + 1)e^{-t}$ est décroissante sur $[0, T[$ et en déduire $D(t) \leq (D(0) + 1)e^t - 1$.

2.2.3. Si $T < +\infty$, obtenir une contradiction à l'aide du théorème d'explosion en temps fini. Conclure.

2.3. On veut démontrer l'invariance du quart de plan $Q := [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, c'est-à dire que si on prend $(x_0, y_0) \in Q$, alors $(x(t), y(t)) \in Q$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2.3.1. Soit $F(x, y) = (1 - 2xy^2, 1 - 2x^2y)$ le champ de vecteur associé à l'EDO (2). Tracer F sur le bord de Q et expliquer brièvement (sans preuve), pourquoi la trajectoire ne peut pas sortir de Q si $(x_0, y_0) \in Q$.

2.3.2. La suite de la question consiste à prouver l'invariance rigoureusement. On fixe $(x_0, y_0) \in Q$ et on suppose par l'absurde que la solution sort de Q. Justifier l'existence de $t^* > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que, par exemple, $x(t^*) = 0$ et $x(t) < 0$ pour $t \in]t^*, t^* + \epsilon[$ (ou alors $y(t^*) = 0$ et $y(t) < 0$ pour $t \in]t^*, t^* + \epsilon[$ selon l'endroit où la trajectoire sort de Q). Faire un développement limité de $x(t)$ au voisinage de t^* et obtenir une contradiction.

2.4. Dans cette question, on étudie l'allure des solutions dans le quart de plan Q.

2.4.1. Trouver les points d'équilibre de l'EDO (2) dans Q et étudier leur stabilité.

2.4.2. On étudie la trajectoire qui démarre de $(x_0, y_0) = (a, a)$ avec $a \geq 0$ fixé. On pose $z(t) = y(t) - x(t)$. Démontrer que z vérifie l'EDO $z' = \varphi(t)z$, où on exprimera $\varphi(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Résoudre cette EDO pour z et en déduire que $(x(t), y(t))$, pour tout $t \geq 0$, reste sur la demi-droite d'équation $y = x$, $x \geq 0$.

2.4.3. À l'aide de la question précédente, démontrer que, si $(x_0, y_0) = (a, a)$, alors x vérifie l'EDO $x' = 1 - 2x^3$. Sans résoudre explicitement cette EDO, tracer son portrait de phase dans $[0, +\infty[$.

2.4.4. Déduire des deux questions précédentes l'allure des solutions de (2) démarrant de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et de $(x_0, y_0) = (3, 3)$, qu'on représentera sur un même dessin.

2.4.5. Compléter le dessin précédent en proposant l'allure du portrait de phase de l'EDO (2) dans le quart de plan Q.
[Faire une synthèse des résultats obtenus en 2.3, 2.4.1 et 2.4.4.]

——————— FIN ———————