Examen du cours "EDO et modélisation"

Lundi 16 octobre 2023 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents distribués dans le cadre de ce cours (polycopié).
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^5 - y(t), \\ y'(t) = 3x(t) - y(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1.1. Écrire l'EDO sous la forme $Y'(t) = F(Y(t))$ avec $Y = (x, y)$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Prouver que pour toute donnée $Y_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy (1) assorti de la condition initiale $Y(0) = Y_0$ admet une unique solution maximale $(]S, T[, Y)$ avec $S < 0 < T$.

1.2. Trouver les points d'équilibre de l'EDO (1).

1.3. Trouver des réels α, β tels que la fonction $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ satisfasse les deux propriétés suivantes :

- V admet un minimum strict sur $\mathbb{R}^2$ au point $(0, 0)$;
- pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, $\langle F(x, y), \nabla V(x, y)\rangle < 0$.
  [$\langle P, Q\rangle = p_1q_1 + p_2q_2$ représente le produit scalaire des vecteurs $P = (p_1, p_2)$ et $Q = (q_1, q_2)$ de $\mathbb{R}^2$.]

1.4. Prouver à l'aide de la question précédente que la fonction $f(t) = V(Y(t))$ est strictement décroissante sur $[0, T[$ si $Y_0 \neq (0, 0)$ (on rappelle que $(]S, T[, Y)$ est la solution maximale de (1) avec la donnée initiale $Y(0) = Y_0$).

1.5. Déduire de la question précédente que la solution maximale $(]S, T[, Y)$ est globale à droite, c'est-à-dire $T = +\infty$.
[Utiliser le théorème d'explosion en temps fini.]

1.6. Comment appelle-t-on une fonction V qui satisfait les propriétés de la question 1.3 ? Que peut-on en déduire quant à la stabilité simple ou asymptotique de $(0, 0)$?

1.7. Linéariser l'EDO (1) au voisinage du point $(0, 0)$ et retrouver le résultat de la question 1.6. Tracer l'allure du portrait de phase de (1) autour de $(0, 0)$.
[Faire l'analyse de la stabilité du point $(0, 0)$ pour l'équation linéarisée à l'aide du poly et expliquer pourquoi le résultat est valable pour l'EDO de départ (1).]

Tourner la page SVP

Exercice 2. La variole, aujourd'hui éradiquée, est une maladie extrêmement contagieuse avec une mortalité élevée. On considère une population humaine de taille totale $N(t)$ au temps t soumise à une épidémie de variole. On note $S(t)$ le nombre des personnes *susceptibles* (qui n'ont pas été touchées par la maladie) dans la population. Quand une personne de la catégorie S tombe malade de la variole, soit elle guérit et entre dans la catégorie I (de taille $I(t) = N(t) - S(t)$) des personnes *infectées* ou *immunisées* (elle ne peut pas retomber malade de la variole), soit elle meurt de la maladie.

On fait les hypothèses suivantes :

- Le nombre de personnes qui tombent malades de la variole représente une proportion β du nombre de susceptibles par unité de temps.
- Le nombre de personnes qui meurent de la variole représente une proportion ν du nombre de personnes qui tombent malades de la variole par unité de temps.
- Le nombre de personnes qui meurent d'une cause autre que la variole représente une proportion d du nombre total de la population par unité de temps.
- Le nombre de naissances représente une proportion b du nombre total de la population par unité de temps. Tous les nouveaux-nés sont susceptibles d'attraper la variole.

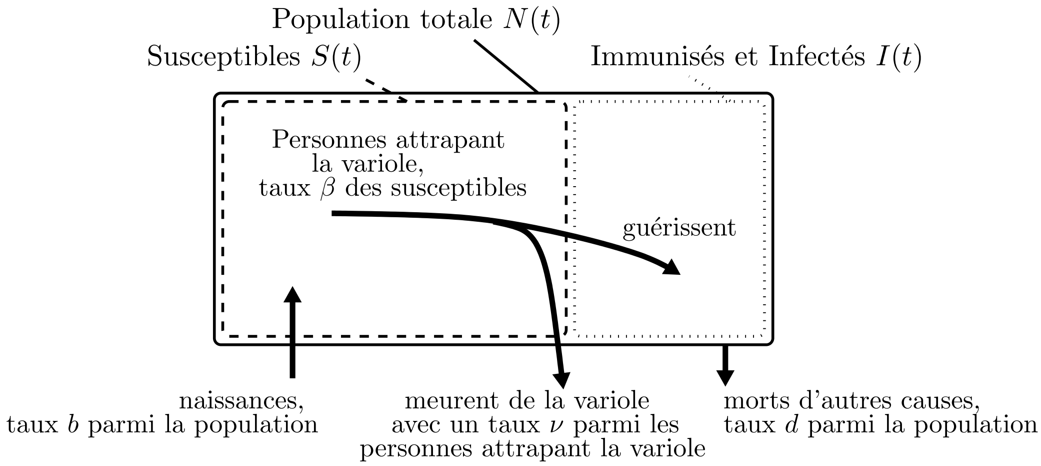

Figure 1

Le schéma de la Figure 1 illustre la dynamique de la variole dans la population considérée.

La plupart des questions sont largement indépendantes les unes des autres et on peut avancer dans l'exercice sans répondre à toutes les questions.

2.1. Écrire les variations $\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ et $\Delta S(t) = S(t+\Delta t) - S(t)$ de la population totale et des susceptibles pendant le temps Δt en fonction de $N(t), S(t), b, d, \beta, \nu, \Delta t$. En déduire un système d'EDO qui modélise l'évolution de $N(t)$ et $S(t)$ au cours du temps.

À partir de maintenant, on suppose pour simplifier que $\underline{b = d = 0}$ et que l'épidémie de variole est modélisée par le système d'EDO

$$\begin{cases} N'(t) = -\nu\beta S(t), \\ S'(t) = -\beta S(t), \end{cases} \qquad t > 0, \tag{2}$$

avec les conditions initiales $N(0) = N_0$ et $S(0) = S_0$ ($\beta, \nu > 0$ et $0 \leq S_0 \leq N_0$ sont donnés).

2.2. Démontrer que le problème de Cauchy (2) avec $(N(0), S(0)) = (N_0, S_0)$ a une unique solution globale à droite.

2.3. Déterminer la solution $S(t)$ de (2) pour tous $t \geq 0$. Quelle est la limite de $S(t)$ quand $t \to +\infty$? Qu'est-ce que cela signifie ?

2.4. Écrire le problème de Cauchy que satisfait la fonction $z(t) = \frac{S(t)}{N(t)}$ qui représente la fraction de la population qui n'a pas été touchée par la variole au temps t.

2.5. On suppose maintenant que $\underline{S_0 = N_0}$. Interpréter la condition initiale du problème de Cauchy de la question 2.4 dans ce cas.

2.6. Déterminer $z(t)$ pour tous $t \geq 0$ en résolvant le problème de Cauchy obtenu dans le question 2.4.
[On remarquera que l'EDO satisfaite par z est une EDO de Bernoulli, cf. poly.]

2.7. Résoudre complètement (2).
[On pourra combiner les résultats de 2.3 et 2.6.]

2.8. Quelle est la limite de $N(t)$ quand $t \to +\infty$?

2.9. On suppose maintenant qu'une proportion $\lambda \in (0, 1)$ de la population a été vaccinée à la naissance. Cela consiste à considérer le problème de Cauchy (2) avec la donnée initiale $S_0 = (1 - \lambda)N_0$. Expliquer pourquoi.

2.10. Résoudre le problème de Cauchy (2) avec la nouvelle condition initiale $(N(0), S(0)) = (N_0, (1-\lambda)N_0)$ et calculer la nouvelle limite de $N(t)$ quand $t \to +\infty$. Comparer ce dernier résultat avec celui de la question 2.8.
[Ne pas refaire tous les calculs mais adapter rapidement les résolutions qui ont été déjà été faites.]

——————— FIN ———————