Année universitaire 2018-2019
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mardi 2 avril 2019 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère l'EDP de transport suivante dans un tube semi-infini

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = -ru & t > 0,\ x > 0, \\ u(t,0) = \theta(t) & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

où la vitesse $c > 0$ et $r \geq 0$ sont des constantes données.

1.1. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $\bar{x} > 0$ au temps $\bar{t} > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.2. Résoudre le problème dans le cas $r = 0$.
[On pourra donner directement la solution en se servant du cours ou des TD mais en respectant les notations de l'énoncé et le fait que le tube est semi-infini.]

1.3. Résoudre le problème dans le cas $r > 0$.
[On pourra se servir des TD et se limiter à donner les étapes les plus importantes.]

On suppose maintenant qu'un fluide incompressible, composé de deux types de particules A et B, circule dans le tube semi-infini à vitesse constante $c > 0$ et que des particules A se transforment en B et réciproquement avec le même coefficient d'échange constant $\sigma > 0$. Les concentrations respectives $c_A(t,x)$ et $c_B(t,x)$ de particules A et B dans le tube satisfont alors le système couplé d'EDP de transport suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_A}{\partial t} + c\dfrac{\partial c_A}{\partial x} = \sigma(c_B - c_A) & t > 0,\ x > 0, \\ \dfrac{\partial c_B}{\partial t} + c\dfrac{\partial c_B}{\partial x} = \sigma(c_A - c_B) & t > 0,\ x > 0, \\ c_A(t,0) = \beta, \quad c_B(t,0) = 1 - \beta & t > 0, \\ c_A(0,x) = \beta, \quad c_B(0,x) = 1 - \beta & x > 0, \end{cases}$$

où $0 \leq \beta \leq 1$ est une constante fixée donnant le taux de mélange à l'instant initial et à l'entrée du tube.

1.4. Soit $u(t,x) = c_A(t,x) + c_B(t,x)$ et $v(t,x) = c_A(t,x) - c_B(t,x)$. Écrire le problème de type (1) satisfait par u et celui satisfait par v.

1.5. Résoudre le problème satisfait par u *[on pourra utiliser 1.2]*. Pouvait-on deviner la solution sans calculs ?

1.6. Résoudre le problème satisfait par v *[on pourra utiliser 1.3]*.

1.7. En déduire $c_A(t,x)$ et $c_B(t,x)$ pour tous $t > 0$ et $x > 0$.

1.8. Soient $x(t)$ une caractéristique. Que valent les limites $c_A(t,x(t))$ et $c_B(t,x(t))$ quand $t \to +\infty$? Interpréter.

Exercice 2. On considère une barre de métal de longueur L parfaitement isolée latéralement (cf. figure 1). La température $u(t,x)$ dans la barre ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et est régie par le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad t > 0,\ 0 < x < L, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{5}$$

où $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}^+$ est définie par $u_0(x) = \alpha \dfrac{x}{L}\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)$ pour $x \in [0,L]$ et λ, α sont des constantes positives données.

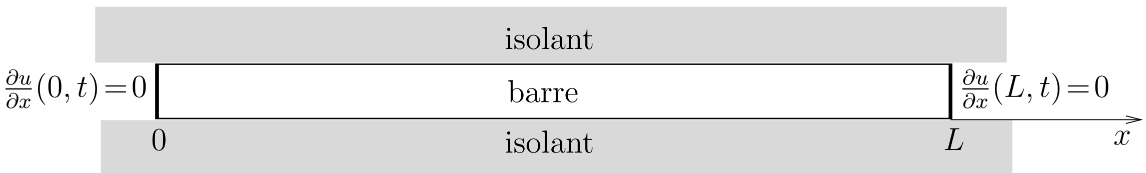

Figure 1 : la barre de métal

2.1. Donner les unités des constantes λ et α.

2.2. Tracer la fonction u_0. Que représente-t-elle ?

2.3. Expliquer à quoi correspondent physiquement les conditions au bord (3)-(4). Décrire qualitativement (sans faire de calculs) l'évolution de la température dans la barre en fonction du temps.

On se propose maintenant de retrouver mathématiquement l'évolution de la température en résolvant le système.

2.4. On cherche une solution de (2) sous la forme $v(t,x) = \phi(x)\psi(t)$. Écrire les équations différentielles ordinaires satisfaites par ϕ et ψ et donner leurs solutions générales.

2.5. Démontrer que si l'on cherche ϕ et ψ de manière à satisfaire de plus les conditions au bord (3)-(4), on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $v_k(x,t) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ avec $k = 0, 1, 2, \cdots$ que l'on déterminera.

2.6. Déterminer des constantes a_k, $k = 0, 1, 2, \cdots$, de sorte que l'on puisse écrire

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Calculer a_0 et les a_k pour $k \geq 1$.

[Indication : on pourra prolonger u_0 sur $[-L, 0[$ par parité, puis sur $\mathbb{R}$ par $2L$-périodicité et ensuite appliquer le théorème du développement en série de Fourier rappelé dans la liste 3 d'exercices.]

2.7. Trouver la solution $u(t,x)$ du système complet sous la forme

$$u(t,x) = \frac{v_0(t,x)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(t,x)$$

en exploitant la condition initiale (5) et en utilisant la question précédente.

2.8. Quelle est la limite de $u(t,x)$ quand $t \to +\infty$?

—————— **FIN** ——————