INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2019-2020
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mardi 31 mars 2020 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les notes de cours et TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère un tube horizontal de longueur L dans lequel circule de la gauche vers la droite un fluide compressible de masse volumique $\rho(t,x)$. Celle-ci ne dépend que de l'abscisse $0 \leq x \leq L$ et du temps t et son évolution est gouvernée par l'EDP de transport

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial (v(x)\rho(t,x))}{\partial x} = \beta, \qquad 0 < x < L,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

$$\rho(t,0) = \theta(t), \qquad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$\rho(0,x) = \rho_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L. \tag{3}$$

Les données du problème sont la vitesse du fluide $v(x) = v_0 + \gamma x$ (avec $v_0 > 0$ et $\gamma > 0$), la condition d'entrée à gauche dans le tube $\theta(t)$, la condition initiale $\rho_0(x)$ et la constante $\beta > 0$.

1.1. Quelles sont les unités des constantes γ et β ?

1.2. Calculer l'expression de la caractéristique $x(t)$ passant par le point (t_0, x_0) pour $0 \leq t_0 \leq T$, $0 \leq x_0 \leq L$. Représenter l'allure des caractéristiques sur un dessin.

1.3. Trouver l'Équation Différentielle Ordinaire qui régit la variation de ρ le long de la caractéristique $x(t)$ et résoudre cette EDO.
[On dérivera par rapport au temps la quantité $\rho(t, x(t))$.]

1.4. Résoudre le problème (1)-(2)-(3).
[On donnera la solution dans chacune des zones séparées par la caractéristique critique.]

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère une corde vibrante de longueur L fixée à ses deux extrémités. À l'équilibre, l'amplitude de la corde est $v(t,x) = 0$ pour $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, comme sur la Figure 1. On suppose que l'évolution de l'amplitude de la corde au cours du temps est régie par l'EDP des ondes amortie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) = -r \frac{\partial v}{\partial t}(t,x), \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{4}$$

où $r > 0$ est une constante fixée.

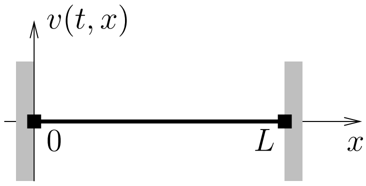

Figure 1 : La corde à l'équilibre

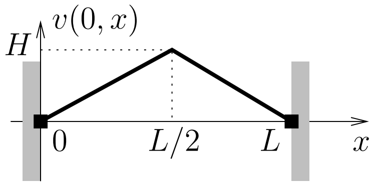

Figure 2 : La corde pincée à $t = 0$

Les questions 2.1 et 2.5 sont indépendantes des autres.

2.1. On pince la corde en son milieu, on la soulève à l'altitude H puis on la lâche sans vitesse initiale (cf. Figure 2 pour l'amplitude de la corde au moment où on la lâche). Écrire les 2 conditions aux limites et les 2 conditions initiales qu'il faut rajouter à (4) pour décrire complètement le mouvement de la corde.

2.2. On cherche une solution de (4) à variables séparées sous la forme $v(t,x) = \phi(x)\psi(t)$. Démontrer que ϕ et ψ satisfont des EDO du second ordre linéaires à coefficients constants de la forme

$$\phi''(x) + a_1\phi(x) = 0, \tag{5}$$

$$\psi''(t) + a_2\psi'(t) + a_3\psi(t) = 0, \tag{6}$$

où a_1, a_2, a_3 sont à calculer en fonction de c, r et $\omega^2 = -\dfrac{\phi''(x_0)}{\phi(x_0)} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\psi''(t_0) + r\psi'(t_0)}{\psi(t_0)}$.

À partir de maintenant $\underline{r = 1}$ et on suppose que ω est un réel tel que $\underline{4c^2\omega^2 > 1}$.

2.3.1. Donner la solution générale de (5).

2.3.2. Démontrer que la solution générale de (6) est $\psi(t) = e^{-t/2}\left(C\cos(\frac{\delta t}{2}) + D\sin(\frac{\delta t}{2})\right)$ avec C, D constantes réelles et $\delta = \sqrt{4c^2\omega^2 - 1}$.

À partir de maintenant $\underline{L = 1}$. On rajoute à (4) les conditions aux limites

$$v(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{7}$$

$$v(t,1) = 0, \qquad t > 0. \tag{8}$$

2.4. Démonter qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant (4)-(7)-(8) de la forme

$$v_k(t,x) = e^{-t/2}\left(C_k\cos(\frac{\sqrt{4c^2k^2\pi^2 - 1}}{2}t) + D_k\sin(\frac{\sqrt{4c^2k^2\pi^2 - 1}}{2}t)\right)\sin(k\pi x), \tag{9}$$

où $k = 1, 2, 3, \ldots$ et les C_k, D_k sont des constantes réelles.

Tourner la page SVP

2.5. On considère la fonction $v_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $v_0(x) = 2Hx$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $v_0(x) = 2H(1-x)$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ où $H > 0$ est une constante fixée. Déterminer une suite $(\gamma_k)_{k=1,2,\ldots}$ de sorte que

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin(k\pi x), \qquad x \in [0,1].$$

[Développer en série de Fourier un prolongement périodique convenable de v_0.]

2.6. On rajoute à (4)-(7)-(8) les conditions initiales

$$v(0,x) = v_0(x), \qquad x \in [0,1], \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,1]. \tag{11}$$

Trouver la solution du système (4)-(7)-(8)-(10)-(11) sous la forme $v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t,x)$.

2.7. Décrire très brièvement le phénomène décrit par une corde vibrante gouvernée par le système (4)-(7)-(8)-(10)-(11) et donner l'évolution de l'amplitude pour des temps grands. Qu'est-ce qui change si on prend $r = 0$ dans (4) ?

FIN