INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024

2ème année - 1er cycle - STPI

Analyse 3 - Bimestre 1

Solutions des exercices à travailler en autonomie

Exercice 1 *2.* $\frac{\cos(x)}{(1+2x)} = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 - 7x^3 + o(x^3)$

$(1+x^2)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$

$\ln(\cos(2x)) = -2x^2 + o(x^3)$

3. $\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + o(x-2)^2$

Exercice 2 *(a)* $f(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = \frac{x^2\ln(x)+x}{x^4+\ln(x)} \sim_{+\infty} \ln(x)x^{-2}$

(c) $f(x) = 1 + x^3\ln(x) \sim_{+\infty} x^3\ln(x)$

Exercice 3 $f(x) = (\sin x)^{3/2} \sim_0 x^{3/2}$

$g(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2} \sim_0 \ln(x)x^{-2}$

$h(x) = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\ln(x)} \sim_0 x^{-\frac{1}{2}}\ln(x)^{-1}$

Exercice 4 *1.* $\sqrt{1+x+x^2} + x \sim_0 1, \qquad \sim_1 \sqrt{3}+1, \qquad \sim_{+\infty} 2x.$

2. $\sqrt{1+x+x^2} - x \sim_0 1, \qquad \sim_{+\infty} \frac{1}{2}.$

3. $\ln^2(x) + \ln(x) \sim_0 \ln^2(x), \qquad \sim_1 \ln(x), \qquad \sim_{+\infty} \ln^2(x).$

4. $\frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)} \sim_0 -9/8.$

5. $\frac{1-e^x\sin(x)}{x^2+x^3} \sim_0 \frac{1}{x^2}.$

Exercice 5 *Calculer les intégrales, ou les primitives suivantes :*

$\int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx, = \sin(e) - \sin(1)$

$\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\,dx, = 1 - \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,dx = \frac{3\pi}{16}$

$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9}$

$\int \sin^3(x)\cos^9(x)\,dx = \frac{\cos^{12}(x)}{12} - \frac{\cos^{10}(x)}{10}$

Exercice 6 $\int_0^1 \frac{2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{4}(\pi + \ln(64))$

Exercice 7 *Etudier la convergence des intégrales suivantes :*

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{e^t+t^2+2}\,dt$ *CV car* $t^2 \cdot \frac{t^2+1}{e^t+t^2+2} \underset{+\infty}{\sim} t^4 e^{-t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$
2. $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *CV (exemple fait dans le cours)*
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t+1}\,dt$ *CV en* 0 *car* $\frac{\ln(t)}{e^t+1} \sim_0 \frac{\ln(t)}{2}$ *qui est de signe constant (négatif) sur un voisinage de* 0^+ *et dont l'intégrale CV en* 0*. CV également en* $+\infty$ *car* $t^2\frac{\ln(t)}{e^t+1} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.
4. *Sur* $]0,1[$, $\frac{1}{\sqrt{t^3-2t^2+t}} = \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$ *qui est équivalent en* 0 *à* $\frac{1}{\sqrt{t}}$ *dont l'intégrale converge en* 0 *par Riemann et qui est équivalent en* 1 *à* $\frac{1}{1-t}$ *dont l'intégrale diverge en* 1 *par Riemann également (et changement de variable).*
5. $\int_0^1 \frac{1}{\cos(t)-1}$ *DV car* $\frac{1}{\cos(t)-1} \sim_0 \frac{-2}{t^2}$ *dont l'intégrale diverge en* 0 *par Riemann (pas de pb en 1).*
6. $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t^2+1}\,dt$ *CV en* $+\infty$ *car* $t^2\frac{te^{-t}}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ *(pas de pb en 0).*
7. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$ *CV en* 0 *car équivalent en* 0 *à* $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *dont l'intégrale est convergente en* 0 *par Riemann. CV aussi en* $+\infty$ *car* $|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ *dont l'intégrale est convergente en* $+\infty$ *par Riemann.*
8. $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)\,dt$ *DV car* $\sqrt{t+1}-\sqrt{t} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}}$ *dont l'intégrale est divergente en* $+\infty$.
9. $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\,dt$ *CV car* $\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{\sqrt{t}} \sim_{+\infty} \frac{-1}{2t^{3/2}}$ *qui est de signe constant (négatif) au voisinage de* $+\infty$ *et dont l'intégrale est divergente en* $+\infty$.
10. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ *CV car* $x^2 \cdot xe^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$
11. $\int_X^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln(-\ln(x))]_X^{1/2} \underset{X\to 0}{\to} -\infty$*. Donc* $\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ *DV en* 0*. Avec la même technique, on montre que* $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ *DV en* 1 *également.*
12. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$ *DV en* $+\infty$ *car* $\frac{\arctan(x)}{x} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2x}$ *dont l'intégrale est divergente en* $+\infty$ *par Riemann.*

Exercice 8 *Montrer la convergence puis calculer chacune des intégrales suivantes :*

1. $\int_X^1 \ln(x)\,dx = [x\ln(x)-x]_X^1 = -1 - X\ln(X) - X \underset{X\to 0}{\to} -1$*. Donc* $\int_X^1 \ln(x)\,dx = -1$.
2. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \frac{\ln(2)+1}{2}$ *(i.p.p.)*
3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \ln(2)$ *(décomposition en éléments simples)*
4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x} = \frac{\ln(2)}{2}$ *(décomposition en éléments simples)*
5. *** $I_n = \int_0^1 \ln(x)^n\,dx = (-1)^n n!$ *(après l'i.p.p., on trouve* $I_n = -nI_{n-1}$ *et comme* $I_0 = 1$*, cela donne le résultat).*

Exercice 9

1. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(3-x)^\alpha}$ *DV pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(car par Riemann, l'intégrale CV en 3 ssi* $\alpha < 3$ *et elle CV en* $+\infty$ *ssi* $\alpha > 3$*.)*
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\beta t}\,dt$ *CV ssi* $\beta < 0$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan(t)}{t^\gamma}\,dt$ *CV en* $+\infty$ *ssi* $\gamma > 1$ *par Riemann et CV en* 0 *ssi* $\gamma < 1$ *(car* $\frac{arctan(t)}{t^\gamma} \sim_0 \frac{1}{t^\gamma}$*).*

Exercice 10 *Pour les suites ci-dessous, donner un équivalent quand* $n \to +\infty$ *de la forme* $Cn^\alpha (\ln n)^\beta$*, avec* $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *:*

$$\frac{1+n}{n^3 \ln(n^2)} \sim 1/2n^{-2}(\ln(n))^{-1}, \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim_0 n^{-1}, \quad \frac{n^2+\sqrt{n}}{\ln(n)} \sim_0 n^2(\ln(n))^{-1}.$$

Exercice 11 *Calculer en fonction de* n *les sommes* S_n *suivantes, et conclure si la suite* $(S_n)_n$ *converge ou non (éventuellement en fonction des données présentes dans la somme).*

1. $S_n := \sum_{k=1}^n a^k = a\frac{1-a^n}{1-a}$ *CV vers* $\frac{a}{1-a}$ *ssi* $|a| < 1$.
2. $S_n := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$ *CV vers* $l - x_0$ *ssi* $x_n \to l$.
3. $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{3k+2}{2k+3k^2+k^3} \to 2$.

Exercice 12 *Etudier la convergence des séries numériques suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ *CV car* $\frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-1/n}$ *DV car* $e^{-1/n} \to 1$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2}}$ *CVA donc CV*
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ *CV car* $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim \frac{-1}{2n^2}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)+1}}$ *DV car* $\frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)+1}} \sim \frac{1}{n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{(n-1)!}$ *CV car* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10}{n} \to 0 < 1$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n})}$ *CV par le critère des séries alternées*
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *CV car* $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ *DV car* $(-1)^n$ *ne tend pas vers* 0 *quand* $n \to \infty$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2+n)^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}}$ *CV car* $\frac{1}{(2+n)^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}} \sim \frac{-2}{3n^{4/3}}$.

Exercice 13 *Déterminer les valeurs des paramétres $a \in [0, +\infty[, b \in [0, +\infty[$ pour lesquelles les séries suivantes sont convergentes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + a^n}{2^n} \text{ CV pour } a \in [0, 2[.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 b^n} \text{ CV pour } b \geq 1.$$

Exercice 14 *Pour chacune des séries suivantes, montrer la convergence puis calculer la somme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n} = \frac{1}{1 - 1/\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

Exercice 15 *Calculer le rayon de convergence des série entières suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) z^n,\ R = 1$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}},\ R = 1$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n + 4^n},\ R = 4$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n + 1} z^n,\ R = 2$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 3^n}{n^2 + 2^n} z^n,\ R = 2/3$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n} z^n,\ R = 1$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n,\ R = 1$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) z^n,\ R = 1$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 5^n) z^n,\ R = 1/5$

Exercice 16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$ *CV pour $x \in]-1, 1]$.*

Exercice 17 *Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant : $\forall k \geq 1,\ a_k = 2\,(k+1)^2 a_{k-1}$. Calculer a_n en fonction de n et a_0 (le résultat doit être exprimé avec puissance et factorielle).*
$a_n = 2^n ((n+1)!)^2 a_0$

Exercice 18 *1.* $A = 2 \times 4 \times 6 \times 8 = 2^4 \times 4!$, $B = \frac{1}{3\times5\times7\times9\times11\times13\times15\times17} = \frac{2^8\times 8!}{17!}$.

2. *Soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *vérifiant :* $\forall k \geq 1,\ a_{k+2} = ka_k$.
   $a_{2n} = 2^{n-1}(n-1)!a_2$
   $a_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^n n!}a_1$

Exercice 19 *Soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$a_n = (6n-3) \times (6n-6) \times (6n-9) \times \cdots \times 3.$$

1. $a_n = \prod_{k=1}^{2n-1} 3k$.
2. $a_n = 3^{2n-1}(2n-1)!$

Exercice 20 *Déterminer une solution développable en série entière des équations différentielles suivantes (on donnera le rayon de convergence de la série obtenue) :*

1. $y'' - xy' - y = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$. *Posons* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Si* y *solution alors on a* $a_0 = 1$ *et* $a_1 = 0$. *On a aussi* $\forall n \geq 0$, $(n+2)a_{n+2} = a_n$. *Donc* $\forall k \geq 0$, $a_{2k} = \frac{1}{2^k k!}a_0 = \frac{1}{2^k k!}$. *Donc* $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}x^{2k} = e^{x^2/2}$.
2. $xy'' + y' + xy = 0$ *avec* $y(0) = 1$. *Posons* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Si* y *solution alors on a* $a_0 = 1$. *On a aussi*
$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n^2 a_n + a_{n-2}\right) x^{n-1} = 0$$
   Donc $a_1 = 0$ *et* $\forall n \geq 2$, $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$. *Donc* $\forall k \geq 0$, $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$. *Donc* $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}$.

Exercice 21 *On considère la série entière :* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+1}{n!}z^n$.

1. $R = +\infty$.
2. $P(X) = X^2 - X + 1 = 1 \cdot X(X-1) + 1$. *Donc*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n = z^2 e^z + e^z$$

Exercice 22 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3} = -\dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^n} - \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}} \right) x^n$, *pour* $x \in]-3/2, 3/2[$.

Exercice 23

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(2\pi)^{2p}}{(2p)!} = 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n!} = e^{-4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2), \quad {}^*\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$