INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
2ème année - 1er cycle - STPI
Analyse 3 - Bimestre 1

Exercices à travailler en autonomie

EXERCICES DE REVISION.

Exercice 1 *1. Donner les DL en 0 à l'ordre 4 des fonctions classiques suivantes :*

$$\frac{1}{1-x},\quad \ln(1+x),\quad \sin(x),\quad \cos(x),\quad e^x,\quad \tan(x),\quad Arctan(x),\quad \sqrt{1+x},\quad arcos(x)$$

2. Déterminer les DL à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$\frac{\cos(x)}{(1+2x)},\quad (1+x^2)^{1/3},\quad \ln(\cos(2x))$$

3. Déterminer le DL à l'ordre 2 en $x=2$ de la fonction suivante :

$$\frac{x+1}{x^2+x}.$$

Exercice 2 *Pour les fonctions suivantes, donner un équivalent en $+\infty$ de la forme $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$ (avec $C,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$) :*

$$(a)\quad f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}},\quad (b)\quad f(x)=\frac{x^2\ln(x)+x}{x^4+\ln(x)},\quad (c)\quad f(x)=1+x^3\ln(x).$$

Exercice 3 *Pour les fonctions suivantes, donner un équivalent en 0 (ou en 0_+ si problème de définition pour $x<0$) de la forme $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$ avec $C,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:*

$$f(x)=(\sin x)^{3/2},\quad g(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2},\quad h(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\ln(x)}.$$

Exercice 4 *Donner un équivalent de la forme $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$ (avec $C,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$) :*

1. $\sqrt{1+x+x^2}+x$ *en* $x=0$, *en* $x=1$ *et en* $x=+\infty$.
2. $\sqrt{1+x+x^2}-x$ *en* $x=0$ *et en* $x=+\infty$.
3. $\ln^2(x)+\ln(x)$ *en* $x=0$, *en* $x=1$ *et en* $x=+\infty$.
4. $\frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)}$ *en* $x=0$.
5. $\frac{1-e^x\sin(x)}{x^2+x^3}$ *en* $x=0$.

Exercice 5 *Calculer les intégrales, ou les primitives suivantes :*

$$\int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx,\ \int_0^{\pi/4}\tan^2(x)\,dx,\ \int_0^{\pi/2}\cos^4(x)\,dx,\ \int x^2\ \ln(x)\,dx,\ \int \sin^3(x)\cos^9(x)\,dx.$$

Exercice 6 *En utilisant une décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \frac{2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}.$$

EXERCICES CHAPITRE 1.

Exercice 7 *Etudier la convergence des intégrales suivantes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{e^t+t^2+2}\,dt, \quad \int_0^1 \ln(t)\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t+1}\,dt \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3-2t^2+t}}\,dt, \quad \int_0^1 \frac{1}{\cos(t)-1}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t^2+1}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)\,dt, \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x\ln x}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$$

Exercice 8 *Montrer la convergence puis calculer chacune des intégrales suivantes :*

1. $\int_0^1 \ln(x)\,dx$.
2. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ *(indication : décomposition en éléments simples)*
4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$ *(indication : décomposition en éléments simples)*
5. * $I_n = \int_0^1 \ln(x)^n\,dx$ *(indication : pour le calcul, on pourra faire une i.p.p. afin de trouver une relation entre* I_n *et* I_{n-1}*).*

Exercice 9 *Déterminer les valeurs des paramétres* α, β, γ *pour lesquelles les intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(3-x)^\alpha}, \quad \int_1^{+\infty} e^{\beta t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{arctan(t)}{t^\gamma}\,dt$$

EXERCICES CHAPITRE 2.

Exercice 10 *Pour les suites ci-dessous, donner un équivalent quand* $n \to +\infty$ *de la forme* $Cn^\alpha(\ln n)^\beta$*, avec* $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *:*

$$\frac{1+n}{n^3\ln(n^2)}, \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad \frac{n^2+\sqrt{n}}{\ln(n)}.$$

Exercice 11 *Calculer en fonction de* n *les sommes* S_n *suivantes, et conclure si la suite* $(S_n)_n$ *converge ou non (éventuellement en fonction des données présentes dans la somme).*

1. $S_n := \sum_{k=1}^n a^k$.

2. $S_n := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$, *où* $(x_k)_{k\geq 0}$ *est une suite réelle.*

3. $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{3k+2}{2k+3k^2+k^3}$.

Indication : utiliser la décomposition en éléments simples : $\frac{3k+2}{2k+3k^2+k^3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2}$.

Exercice 12 *Etudier la convergence des séries numériques suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-1/n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n})}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2+n)^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}}$$

Exercice 13 *Déterminer les valeurs des paramétres* $a \in [0, +\infty[, b \in [0, +\infty[, c$ *pour lesquelles les séries suivantes sont convergentes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + a^n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 b^n}$$

Exercice 14 *Pour chacune des séries suivantes, montrer la convergence puis calculer la somme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

EXERCICES CHAPITRE 3.

Exercice 15 *Calculer le rayon de convergence des série entières suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+4^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3^n}{n^2+2^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n} z^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) z^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 5^n) z^n$$

Exercice 16 *Déterminer les valeurs de* $x \in \mathbb{R}$ *pour lesquelles la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$ *est convergente. Indication : On commençera par calculer le rayon de convergence puis dans un second temps, on étudiera la convergence de la série numérique en chaque point du bord de l'intervalle de convergence.*

Exercice 17 *Soit* $(a_n)_{n\geq 0}$ *vérifiant :* $\forall k \geq 1,\ a_k = 2\,(k+1)^2 a_{k-1}$. *Calculer* a_n *en fonction de* n *et* a_0 *(le résultat doit être exprimé avec puissance et factorielle).*

Indication : *écrire* a_n *en fonction de* a_{n-1}*, puis dans cette relation remplacer* a_{n-1} *par la relation donnant* a_{n-1} *en fonction de* a_{n-2}*, itérer... Une fois la formule obtenue de cette façon, on pourra la justifier par récurrence.*

Exercice 18 *1. Exprimer $A = 2\times 4\times 6\times 8$ à l'aide d'une formule avec puissances et factorielles. Idem pour $B = \frac{1}{3\times5\times7\times9\times11\times13\times15\times17}$.*

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifiant : $\forall k \geq 1,\ a_{k+2} = ka_k$. Calculer a_{2n} en fonction de n et a_2, puis a_{2n+1} en fonction de n et a_1 (les résultats doivent être exprimés avec puissances et factorielles). Indication : appliquer la même méthode que dans l'exercice précédent.

Exercice 19 *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$a_n = (6n-3)\times(6n-6)\times(6n-9)\times\cdots\times 3.$$

1. *Exprimer a_n sous la fome $a_n = \prod_{k=??}^{??} ??$.*
2. *Donner a_n en fonction de n (le résultat doit être exprimé avec puissance et factorielle).*

Exercice 20 *Déterminer une solution développable en série entière des équations différentielles suivantes (on donnera le rayon de convergence de la série obtenue) :*

1. *$y'' - xy' - y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.*
2. ** $xy'' + y' + xy = 0$ avec $y(0) = 1$.*

Exercice 21 *On considère la série entière : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+1}{n!} z^n$.*

1. *Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.*
2. *En écrivant le polynôme $P(X) = X^2 - X + 1$ dans la base $(1, X, X(X-1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$, calculer $f(z)$ en précisant le domaine de validité de la formule obtenue.*

Exercice 22 *Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$, en précisant le domaine de validité de ce développement.*

Exercice 23 *Pour chacune des séries suivantes, montrer la convergence puis calculer la somme (indication : ayez en tête ou notez les développements en série entière des fonctions de référence puis remplacez par la bonne valeur de x)*

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(2\pi)^{2p}}{(2p)!},\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n!},\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n},\quad {}^*\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

AUTRES EXERCICES CORRIGES. Vous pouvez encore vous entrainer en vous rendant par exemple aux sites internet suivants :

1. Bibmath > supérieur > Maths Spé
   — > Intégrales impropres et fonctions intégrales : exercices 1,2,3,4,5,6,13,14,15,16,17
   — > Compléments sur les séries : exercices 1,2,3,17,18,19,26,27,28,29,34,35
   — > Séries entières : exercices 1,2,3,6,22,23,24,25,46
2. exo7 > Deuxième année > Exercices de Maths spé de J.L Rouget > Intégration, séries et séries entières