INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

*Département de Mathématiques*

**Année universitaire 2023-2024**
**2ème année - 1er cycle - STPI**
**Analyse 3 - Bimestre 2**

# Exercices à travailler en autonomie

## SERIES DE FOURIER

**Exercice 1** *Soit $f$ la fonction périodique, de période 2, définie par $f(t) = t - t^3$ pour $t \in ]-1, 1]$.*

1. *Tracer le graphe de $f$ sur $[-3, 3]$.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de $f$.*
3. *Étudier la convergence de la série de Fourier de $f$.*
4. *Que déduire du théorème de Parseval ?*

**Exercice 2** *Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(t) = (t - \pi)^2$ pour $t \in [0, 2\pi[$. On admet que ses coefficients de Fourier $(a_n)_{n \geq 0}$ sont donnés par : $a_o = \frac{2\pi^2}{3}$, $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{4}{n^2}$. (Vous pouvez vérifier ces calculs)*

1. *Pour $t \in [-\pi, 0]$, prouver que $f(t) = f(-t)$, et justifier que $\forall n \geq 1,\ b_n = 0$.*
2. *Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ en justifiant votre réponse.*
3. *Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ en justifiant votre réponse.*

**Exercice 3** *Soit $f$ la fonction $\frac{\pi}{2}$-périodique et impaire, définie par $f(t) = 1 - \cos(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.*

**Exercice 4** *Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. On admet que ses coefficients de Fourier sont donnés par : $b_n = 0$, $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$.*

1. *Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ en justifiant votre réponse.*
2. *En utilisant le théorème de Parseval, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.*

**Exercice 5** *Soit $f$ la fonction 4-périodique telle que* $f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{2} & \textit{si} \quad -2 \leq t \leq 0, \\ 1 - \frac{t}{2} & \textit{si} \quad 0 \leq t < 2, \\ 0 & \textit{sinon} . \end{cases}$

1. *Tracer la fonction $f$.*
2. *La fonction $f$ est-elle égale à sa série de Fourier ? Justifiez.*
3. *Déterminer la série de Fourier de $f$ qu'on notera $S(f)(t)$.*
4. *Calculer*
   (a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$
   (b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

**Exercice 6** *Soit $f$ la fonction définie $f(t) = |\sin(2t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Préciser la parité de $f$. Montrer que $f$ est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et représenter $f$ sur $[-\pi, 2\pi]$.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de $f$ et étudier la convergence de la série de Fourier.*
   ***Indication :*** *retrouver et utiliser la formule* $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cdots)$
3. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1)^2}$.

**FONCTIONS DE DEUX VARIABLES : LIMITES - CONTINUITE**

**Exercice 7** *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose* $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$.

1. *Donner une suite $(a_n, b_n)_n$ telle que $(a_n, b_n) \to (0, 0)$ quand $n \to +\infty$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(a_n, b_n) = -1$.*
2. *De même, donner une suite $(c_n, d_n)_n$ telle que $(c_n, d_n) \to (0, 0)$ quand $n \to +\infty$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(c_n, d_n) = 1$.*
3. *Que dire de l'existence de la limite de $f(x, y)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$ ?*

**Exercice 8** *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose* $f(x, y) = \frac{x+y^2}{x^2+y}$.

1. *Trouver une suite $(a_n, b_n)_n$ telle que $\lim_n (a_n, b_n) = (0, 0)$ et telle que $\lim_n f(a_n, b_n) = 0$.*
2. *Trouver une suite $(c_n, d_n)_n$ telle que $\lim_n (c_n, d_n) = (0, 0)$ et telle que $\lim_n f(c_n, d_n) = +\infty$.*
3. *Que dire de l'existence de la limite de $f(x, y)$ quand $(x, y) \to (0, 0)$ ?*

**Exercice 9** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

*La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ?*

**Exercice 10** *Soit $f$ la fonction définie par* $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. *Tracer l'ensemble de définition de $f$.*

2. *La fonction $f$ est-elle continue sur son ensemble de définition ?*

## DERIVES PARTIELLES

**Exercice 11** *Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de $f(x,y) = x^2+3xy-y^2-4x+2y$.*

**Exercice 12** *Soit $f(t,u,v) = u^3 + \sin(vt)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, et $\frac{\partial f}{\partial v}$. Vérifier par le calcul que $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.*

**Exercice 13** *Soit $f(x,y) = x^2 \ln(xy)$. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de $f$ au point $(1,2)$.*

**Exercice 14** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{\ln(y+x^2)}{\ln(y-x)}$.*

1. *Représenter dans un repère cartésien le domaine de définition de $f$.*
2. *Représenter sur le même graphique la ligne de niveau $2$ de $f$.*
3. *Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de $f$ au point $(0,e)$.*

**Exercice 15** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y) = xy^2$, soient $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln(2t)$ et posons $F(t) = f(x(t), y(t))$. Calculer $F'(t)$ et $F''(t)$ de 2 manières différentes :*

1. *en calculant $F(t)$ puis en dérivant par rapport à $t$.*
2. *en calculant les dérivés partielles premières et secondes de $f$ et en utilisant la formule $F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x} \cdots$.*

**Exercice 16** *Soit $F(x,y) = f(x+2y, x^2-y)$ avec $f(X,Y) = e^X \cdot Y^2$.*

1. *Donner l'expression de $F(x,y)$ puis calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$*
2. *Calculer $\frac{\partial f}{\partial X}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial Y}(x,y)$ puis en utilisant la formule de la dérivée d'une composée, retrouver le résultat de la question 1.*

**Exercice 17** *Soit $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(u,v) \mapsto g(u,v)$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(u,v) := f(e^{u^2+v}, \sin(uv^2))$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de $f$.*

## EQUATIONS AUX DERIVES PARTIELLES

**Exercice 18** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. On effectue le changement de variable $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$ de sorte que $f(x,y) = F(u,v)$.*

1. *Exprimer les dérivés partielles de $F$ en fonction de celles de $f$.*

2. *En déduire les solutions de l'EDP :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2.$$

**Exercice 19** *En utilisant le changement de variable : $u = x + y$ et $v = 3x + y$, trouver les solutions $f$ de classe $C^2$ de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

## RECHERCHE D'EXTREMA

**Exercice 20** *Déterminer les extrema locaux de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.*

**Exercice 21** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Déterminer les points critiques de $f$ et préciser leur nature (col, maximum local ou minimum local).*

**Exercice 22** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$. Déterminer les points critiques de $f$ et préciser leur nature (col, maximum local ou minimum local).*

**Exercice 23** *On considère sur $\mathbb{R}^2$ la fonction : $h(x,y) = x^2 + y^2 + 2 - 2xy$.*

1. *Etudier les extrema de $h$ sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Montrer directement que les points critiques de $h$ sont des minimums globaux.*

## EXTREMA SOUS CONTRAINTE

**Exercice 24** *On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = xy - 1$. et le problème :* **(I)** *Minimiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$..*

1. *Dessiner l'allure des lignes de niveaux de $f$ et $g$ sur le même dessin.*
2. *Sur ce même dessin, représenter graphiquement les solutions de* **(I)**.
3. *Calculer les solutions de* **(I)** *à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$.*

**Exercice 25** *On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x,y) = x^2y^2$ et $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. et le problème :* **(I)** *Maximiser $f(x,y)$ sous la contrainte $h(x,y) = 0$..*

1. *Tracer sur un même dessin les lignes de niveaux $0$, $\frac{1}{4}$ et $1$ de $f$ et la ligne de niveau $0$ de $h$.*
2. *Sur ce même dessin, représenter graphiquement les solutions de* **(I)**.
3. *Calculer les solutions de* **(I)** *à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda h(x,y)$.*