Université de Tours "François Rabelais"
Faculté de Sciences et Techniques
DEUG Sciences de la Matière 2ème Niveau 2002–2003
Calcul Numérique

TD3 : Première Approche à la Modélisation : Maîtriser les itérations

Avec la méthode de Newton-Raphson on possède *une* méthode pour calculer les racines d'une fonction. Mais on peut écrire l'équation $f(x) = 0$ de plusieurs façons–comment choisir la "meilleure" ? Une approche consiste à calculer l'exposant de Lyapunov, qui, de plus, peut nous renseigner sur la *stabilité* de l'itération vers une racine donnée.

Dans ce but on va étudier la vitesse de convergence de la méthode de Newton pour les deux cas du TD2 et la comparer à d'autres approches itératives.

1. La méthode de Newton a une vitesse de convergence *quadratique*, ce qui veut dire que, dans les meilleurs de cas, on gagne 2 chiffres par itération. Contrôler cette affirmation pour les exemples du TD2. Constatez-vous une dépendance au choix du point de départ ?
2. Calculer l'exposant de Lyapunov pour l'itération de Newton, de manière approchée, en utilisant la suite des valeurs générée par l'itération.
3. Pour le modèle mécanique on écrit l'équation pour les limites du mouvement

$$V(z) - E = 0 = \frac{1}{2}z^2 + g_3 z^3 - E = 0 \Rightarrow z_{n+1} = f(z_n) = \frac{2E - z_n^2}{g_3 z_n^2}$$

   Comparer la convergence de cette suite vers les racines z_1 et z_2 avec celle de Newton-Raphson par calcul explicite. Calculer l'exposant de Lyapunov. Peut-on converger vers toutes les racines avec cette suite ?
4. Pour le modèle Lotka-Volterra on écrit l'équation pour les limites du mouvement

$$z - 2e^{(z-E)/(2a)} = 0 \Rightarrow z_{n+1} = f(z_n) = 2e^{(z_n-E)/(2a)}$$

   Comparer la convergence de cette suite vers les racines z_1 et z_2 avec celle de Newton-Raphson par calcul explicite. Calculer l'exposant de Lyapunov. Peut-on converger vers toutes les racines avec cette suite ?
5. **Facultatif :** Si l'on fixe la valeur de g_3 (resp. a) et l'on laisse varier E, peut-on mettre en évidence un passage d'une convergence vers un point fixe à un comportement chaotique (exposant de Lyapunov positif) ?