

Une discussion élémentaire de la “fonction” delta de Dirac

Stam Nicolis
CNRS–Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique (UMR 6083)
Département de Physique
Université de Tours
E-Mail : Stam.Nicolis@phys.univ-tours.fr
WWW : <http://www.phys.univ-tours.fr/~nicolis>

1 Introduction

Lorsque l’on essaie de décrire les propriétés de points matériels on se rend compte que plusieurs expressions n’ont plus de sens-on souhaite “calculer” la dérivée d’une fonction à un point où celle-ci diverge, par exemple. On trouve le premier exemple “flagrant” lors de l’application du théorème de Gauss–Green–Ostrogradskii pour le champ électrique d’une charge électrique ponctuelle immobile. Ne voulant pas renoncer à ce théorème on doit effectuer le calcul de manière plus attentive. Dans ce qui suit on présente une discussion *élémentaire* de cette démarche. On utilise deux exemples : le champ Coulombien et le champ de type Yukawa.

2 Le champ Coulombien

Dans le TD2 on s’est rendu compte que le théorème de Gauss–Green–Ostragradskii, apparemment, n’est pas valable pour le champ électrique coulombien, ainsi que celui de Yukawa. Il est utile de comprendre pourquoi.

Commençons avec le champ coulombien. Dans le TD1 on a trouvé que

$$\nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \equiv \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

On en déduit que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)$$

On veut calculer l'intégrale de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ dans le volume d'une sphère de rayon R , centrée à l'origine, où est placée la charge ponctuelle. On voit immédiatement que l'on a un problème, car la fonction $1/r$ n'est pas dérivable à ce point-là. Comment donner un sens au Laplacien de $1/r$ à l'origine ? On utilise l'astuce suivante[1] :

On considère la fonction

$$f_a(r) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{a}^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

cf. fig. 1 Pour $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ fixe cette fonction a la propriété que

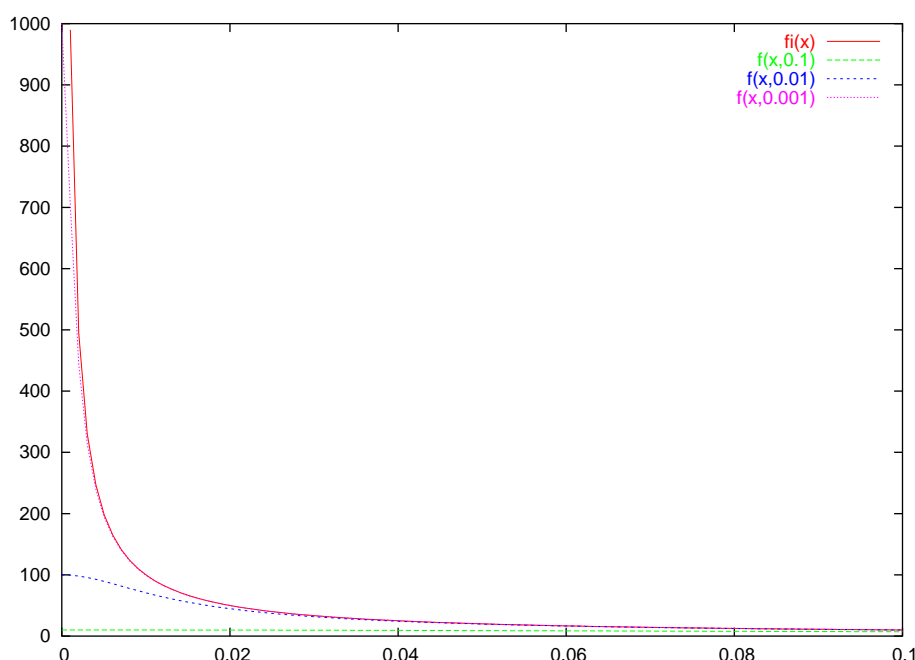


FIG. 1 – La fonction $f_a(r)$ pour $a = 1, 0.1, 0.01, 0$.

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a(r) = \frac{1}{r}$$

mais elle a, aussi, la propriété que pour un vecteur $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, la fonction $f_a(r)$ est dérivable à l'origine. On trouve facilement

$$\nabla f_a(r) = -\frac{\mathbf{r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}}$$

et

$$\nabla^2 f_a(r) = -\frac{3a^2}{[r^2 + a^2]^{5/2}} \quad (1)$$

Cette dernière fonction, cf. fig. 2 est intégrable et son intégrale sur tout l'espace peut être calculée explicitement par des méthodes élémentaires (cf. Annexe)

$$-3a^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} \frac{1}{[r^2 + a^2]^{5/2}} = -3a^2 \times 4\pi \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{[r^2 + a^2]^{5/2}} = -4\pi$$

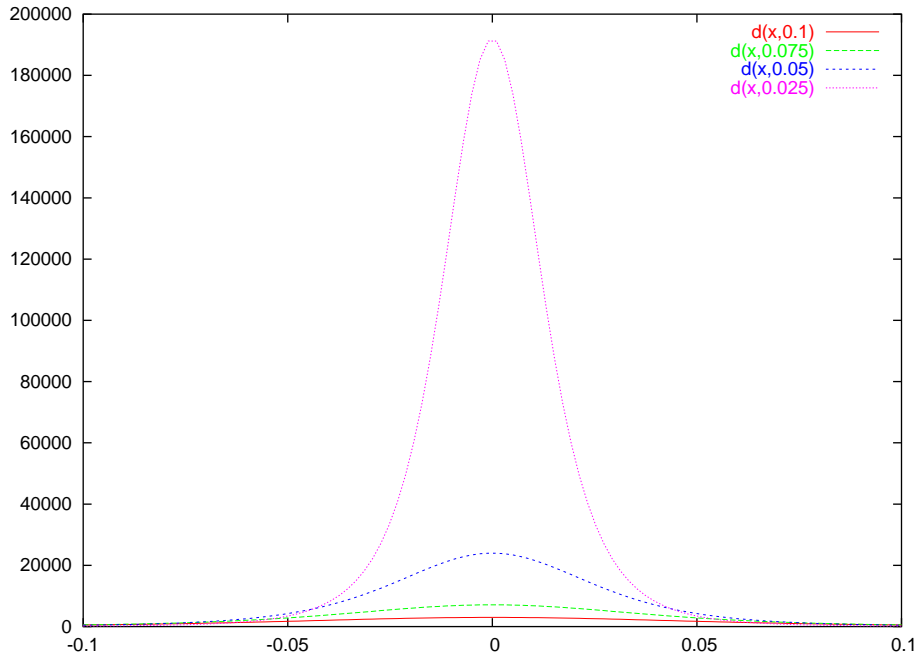


FIG. 2 – Approximations successives à la “fonction” $\delta(r)$ de Dirac. On trace $-\nabla^2 f_a(r)$ de l’éq. (1) pour $a = 0.1, 0.075, 0.05, 0.025$.

Sur un domaine sphérique de rayon R on trouve

$$\int_0^R \nabla^2 f_a(r) d^3 \mathbf{r} = -4\pi \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)^3$$

On note que cette expression, pour $R > 0$, possède une limite pour $a \rightarrow 0$, à savoir

$$\lim_{a \rightarrow 0} -4\pi \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)^3 = -4\pi$$

indépendante de R !

Résumons la situation. On voulait calculer

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3 \mathbf{r}$$

dans le volume d’une sphère de rayon R . Puisque $\nabla^2(1/r)$ n’est pas défini à l’origine, on introduit un “lissage”

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3 \mathbf{r} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla^2 (f_a(r)) d^3 \mathbf{r}$$

et l’on trouve le résultat que

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3 \mathbf{r} = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

en accord avec le calcul de

$$\oint \mathbf{E} \cdot n dA$$

sur la surface de la même sphère.

3 Le champ de Yukawa

Pour le champ de Yukawa on procède de façon similaire. On doit calculer

$$\nabla \cdot \mathbf{E}$$

où, cette fois-ci,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(\mu + \frac{1}{r} \right) e^{-\mu r}$$

On sait que

$$-\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

et que

$$-\frac{\mathbf{e}_r}{r} = -r \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

Par conséquent, $\nabla \cdot \mathbf{E}$ est constitué des morceaux suivants :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left[\mu e^{-\mu r} r \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + e^{-\mu r} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

La stratégie sera de mettre en évidence $\nabla^2(1/r)$ et d'utiliser la propriété que l'on a mise en évidence précédemment. On sous-entend, encore une fois, le remplacement de $\nabla^2(1/r)$ par $\nabla^2(f_a(r))$ et l'étude de la limite $a \rightarrow 0$ à la fin du calcul.

On trouve, immédiatement,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla [(\mu r + 1)e^{-\mu r}] \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) + (\mu r + 1)e^{-\mu r} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \right)$$

L'intégrale sur le volume de la sphère de rayon R et centrée à l'origine comporte, donc deux termes

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq R} \nabla \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} \nabla [(\mu r + 1)e^{-\mu r}] \cdot \nabla (f_a(r)) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} (\mu r + 1)e^{-\mu r} \nabla^2 (f_a(r))$$

Le deuxième terme donne, immédiatement,

$$-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} (\mu r + 1)e^{-\mu r} \nabla^2 (f_a(r)) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Le premier terme demande un peu plus de travail. En y remplaçant l'expression concrète pour $\nabla(f_a(r))$ on obtient l'expression suivante

$$\frac{q\mu}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr$$

Cette intégrale semble, à première vue, très compliquée. Mais l'on ne doit oublier qu'elle dépend du paramètre libre a et que c'est son comportement dans la limite $a \rightarrow 0$ qui est pertinent. Peut-on établir la relation suivante ?

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^R \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr = \int_0^R \lim_{a \rightarrow 0} \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr$$

Ceci revient à montrer que la convergence

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr = (1 - \mu r)e^{-\mu r}$$

est *uniforme*. Les détails de la démonstration sont dans l'annexe. En admettant cette dernière, on trouve facilement que cette intégrale vaut

$$\frac{q}{\varepsilon_0} \mu R e^{-\mu R}$$

La somme des deux termes donne

$$\frac{q}{\varepsilon_0} (1 + \mu R) e^{-\mu R}$$

En fait, il ne faut pas oublier un signe, que l'on a laissé tomber en cours de route; le résultat finale est, alors,

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq R} \nabla \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{r} = -\frac{q}{\varepsilon_0} (1 + \mu R) e^{-\mu R} = \oint_{|\mathbf{r}|=R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r}$$

4 Un cas plus général

Il est intéressant de noter que l'on peut écrire le résultat de la manière suivante :

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \times 1 d^3 \mathbf{r} = -4\pi \times 1$$

Que se passe-t-il si l'on doit calculer l'intégrale d'une fonction $F(\mathbf{r})$?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) F(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}| \leq R} \nabla^2 (f_a(r)) F(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$$

On note que la fonction $\nabla^2(f_a(r))$ est piquée autour du point $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ d'autant plus que a est petit. On peut, alors, s'attendre à ce que le résultat soit la valeur de F à l'origine, $F(\mathbf{0})$. Dans ce qui suit on va démontrer cette affirmation.

Si $F(\mathbf{r})$ varie lentement dans la région $|\mathbf{r}| \leq R$, on peut la remplacer par son développement limité autour de l'origine

$$F(\mathbf{r}) \approx F(\mathbf{0}) + \mathbf{r} \cdot [\nabla F]_{\mathbf{0}} + \dots$$

Le terme général d'ordre *impair* a comme expression ($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{1}{(2m+1)!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2m+1}}^3 [\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{2m+1}} F]_{\mathbf{0}} r_{i_1} \times r_{i_2} \times \dots \times r_{i_{2m+1}}$$

On peut vérifier que, pour $m = 0$, on retrouve bien l'expression

$$\mathbf{r} \cdot [\nabla F]_{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^3 [\nabla F]_{\mathbf{0}} r_i$$

Comme on va voir par la suite, la contribution des termes d'ordre impair au calcul qui nous intéresse est nulle.

Le terme général d'ordre *pair* a comme expression ($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{1}{(2m)!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2m}}^3 [\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_{2m}} F]_{\mathbf{0}} r_{i_1} \times r_{i_2} \times \dots \times r_{i_{2m}}$$

On peut vérifier, encore une fois, que le terme $m = 0$ correspond à la constante $F(\mathbf{0})$, tout comme le terme $m = 1$ au terme d'ordre 2

$$\frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [\partial_i \partial_j F]_{\mathbf{0}} r_i r_j = \frac{1}{2} \left(x^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right]_{\mathbf{0}} + y^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right]_{\mathbf{0}} + z^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right]_{\mathbf{0}} \right) + \left(xy \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right]_{\mathbf{0}} + yz \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \right]_{\mathbf{0}} + zx \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \right]_{\mathbf{0}} \right)$$

ainsi de suite.

On obtient, alors,

$$\int \nabla^2 (f_a(r)) F(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} \nabla^2 (f_a(r)) F(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$$

On choisit a de façon à ce que $a \leq R$ et l'on trouve

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} \nabla^2 (f_a(r)) F(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \approx \int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right) (F(\mathbf{0}) + \mathbf{r} \cdot [\nabla F]_{\mathbf{0}} + \dots) d^3 \mathbf{r}$$

Le premier terme nous donne

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} F(\mathbf{0}) \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right) d^3 \mathbf{r} = -4\pi F(\mathbf{0}) \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)^3$$

Le deuxième terme,

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} \mathbf{r} \cdot [\nabla F]_{\mathbf{0}} \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right) d^3 \mathbf{r} = [\nabla F]_{\mathbf{0}} \cdot \int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} \mathbf{r} \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right) d^3 \mathbf{r} = 0$$

car le domaine d'intégration est symétrique autour de l'origine, \mathbf{r} est une fonction *impair* de \mathbf{r} et

$$\left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right)$$

est une fonction *pair* de \mathbf{r} . On peut, aussi, déduire que tous les termes *impairs* dans le développement de Taylor s'annulent également. Qu'en est-il des termes *pairs* ?

Le terme d'ordre 2 a la forme

$$\frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [\partial_i \partial_j F]_{\mathbf{0}} \int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} r_i r_j \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right) d^3 \mathbf{r}$$

et les autres termes sont de la forme

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{i_1, \dots, i_{2n}}^3 [\partial_{i_1} \dots \partial_{i_{2n}} F]_{\mathbf{0}} \int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} r_{i_1} \times \dots \times r_{i_{2n}} \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right) d^3 \mathbf{r}$$

On passe en coordonnées sphériques,

$$r_i = r \times A_i(\theta, \phi)$$

avec $A_i(\theta, \phi)$ des fonctions des angles polaire et azimutal (par exemple, $r_1 \equiv x = r \cos \phi \sin \theta$). Ceci implique que

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} r_{i_1} \times \dots \times r_{i_{2n}} \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right) d^3 \mathbf{r} = C \times \underbrace{\int_{|\mathbf{r}| \leq a \leq R} r^{2n+2} dr \left(-\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right)}_{I_n}$$

où C est la constante, obtenue en intégrant sur les angles. Reste alors l'intégrale sur le rayon, I_n . On sait, déjà, que $I_0 = (R/\sqrt{R^2 + a^2})^3$. On cherche, en fait, à calculer

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_n$$

On décompose I_n en deux intégrales :

$$I_n = \underbrace{-3a^2 \int_0^a \frac{r^{2n+2}}{[r^2 + a^2]^{5/2}}}_{I_n^{(1)}} \underbrace{-3a^2 \int_a^R \frac{r^{2n+2}}{[r^2 + a^2]^{5/2}}}_{I_n^{(2)}}$$

Dans la première on pose $r/a = z$ et l'on obtient

$$I_n^{(1)} = -3a^{2n} \int_0^1 \frac{z^{2n+2}}{[z^2 + 1]^{5/2}} dz$$

dont la dépendance en a est transparente. L'intégrale sur z est une constante *finie* pour toute valeur de n , par conséquent

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_n^{(1)} = 0$$

Dans la deuxième intégrale on fait la même chose et l'on trouve

$$I_n^{(2)} = -3a^{2n} \int_1^{R/a} \frac{z^{2n+2}}{[1 + z^2]^{5/2}} dz$$

Lorsque $a \rightarrow 0$ la borne, potentiellement, dangereuse est la supérieure, car l'intégrande peut diverger lorsque $z \rightarrow \infty$.

Mais l'on se rend compte que, puisque $1 \leq z \leq R/a$,

$$\frac{z^{2n+2}}{[1 + z^2]^{5/2}} < z^{2n-3}$$

Cette comparaison implique, à son tour, que

$$\int_1^{R/a} \frac{z^{2n+2}}{[1+z^2]^{5/2}} dz < \int_1^{R/a} z^{2n-3} dz = \frac{(R/a)^{2n-2}}{2n-2} - \frac{1}{2n-2} < \frac{R^{2n-2}}{2n-2} a^{2-2n}$$

On en déduit que

$$|I_n^{(2)}| < C_1 \times a^2 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} I_n^{(2)} = 0$$

Par conséquent, pour R fixe, chaque coefficient du développement de Taylor tend vers zéro, lorsque $a \rightarrow 0$. Le résultat final est

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r}) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3 \mathbf{r} = -4\pi F(\mathbf{0})$$

On peut, alors, adopter la règle suivante : chaque fois que l'on trouve l'expression

$$\int F(\mathbf{r}) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) d^3 \mathbf{r}$$

et le domaine d'intégration contient l'origine, on sous-entend la limite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int F(\mathbf{r}) \nabla^2 (f_a(r)) d^3 \mathbf{r}$$

et l'on va lui associer la valeur $-4\pi F(\mathbf{0})$. On écrit, souvent, alors,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

et l'on appelle $\delta(\mathbf{r})$ la *fonction delta de Dirac*. Cette expression est trompeuse, car il ne s'agit pas d'une fonction, mais, plutôt, d'un opérateur, qui agit sur l'espace de fonctions suffisamment lisses et réalise la correspondance

$$\int F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \rightarrow F(\mathbf{0})$$

Elle n'a pas de sens en dehors de l'intégrale, en fait.

5 Conclusions

Ces exemples sont des illustrations particulièrement appropriées pour mettre en évidence d'une part la nécessité du raisonnement mathématique soigné, pour des applications "concrètes". Il est aussi remarquable que les outils "techniques" requis sont, en fait, élémentaires !

A Calcul de l'intégrale $-3a^2 \int_{|\mathbf{r}| \leq R} d^3\mathbf{r} / [r^2 + a^2]^{5/2}$

On veut calculer l'intégrale

$$-3a^2 \int_{|\mathbf{r}| \leq R} d^3\mathbf{r} / [r^2 + a^2]^{5/2} = -3a^2 \times 4\pi \int_0^R \frac{r^2}{[r^2 + a^2]^{5/2}} dr$$

On effectue le changement de variables suivant

$$r = a \sinh \theta$$

et l'on trouve

$$-3a^2 \times 4\pi \int_0^{\sinh^{-1}(R/a)} \frac{1}{a^2} \frac{\sinh^2 \theta}{\cosh^4 \theta} d\theta$$

On note que

$$\frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} = \tanh \theta$$

$$\frac{d}{d\theta} \tanh \theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta}$$

$$\tanh \left[\sinh^{-1} \frac{R}{a} \right] = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

pour trouver immédiatement

$$-3a^2 \times 4\pi \int_0^{\sinh^{-1}(R/a)} \frac{1}{a^2} \frac{\sinh^2 \theta}{\cosh^4 \theta} d\theta = -4\pi \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)^3$$

La limite de cette expression pour $a \rightarrow 0$ existe et est égale à -4π indépendamment de la valeur de R .

B La convergence uniforme

Dans cet annexe on présente les détails techniques de la démonstration que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^R \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dr = \int_0^R (1 - \mu r)e^{-\mu r} dr$$

Si l'on dessine la fonction $F(x) = (1 - x)e^{-x}$ ainsi que la famille $G(x, a) = x^3(1 - x)e^{-x} / [(x^2 + a^2)^{3/2}]$, cf. fig. 3, on peut avoir des doutes sur la convergence uniforme. Et si l'on regarde le détail, cf. fig. 4,

on commence à penser que la convergence

$$\lim_{a \rightarrow 0} G(x, a) = F(x)$$

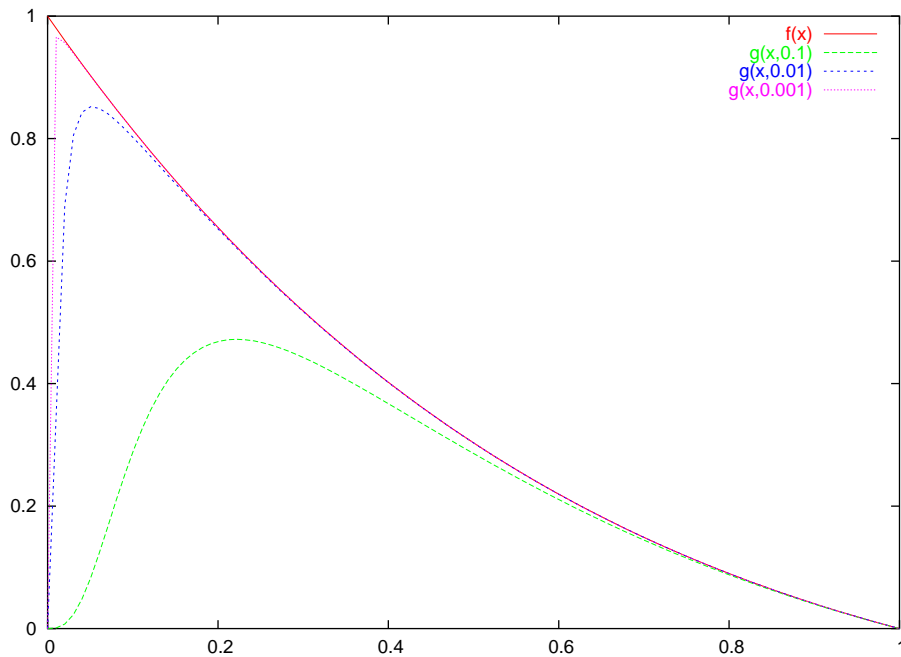


FIG. 3 – La fonction limite $F(x) = (1-x)e^{-x}$ et les fonctions $G(x, a) = (1-x)e^{-x}x^3/[x^2+a^2]^{3/2}$ pour $a = 0.1, 0.01, 0.001$.

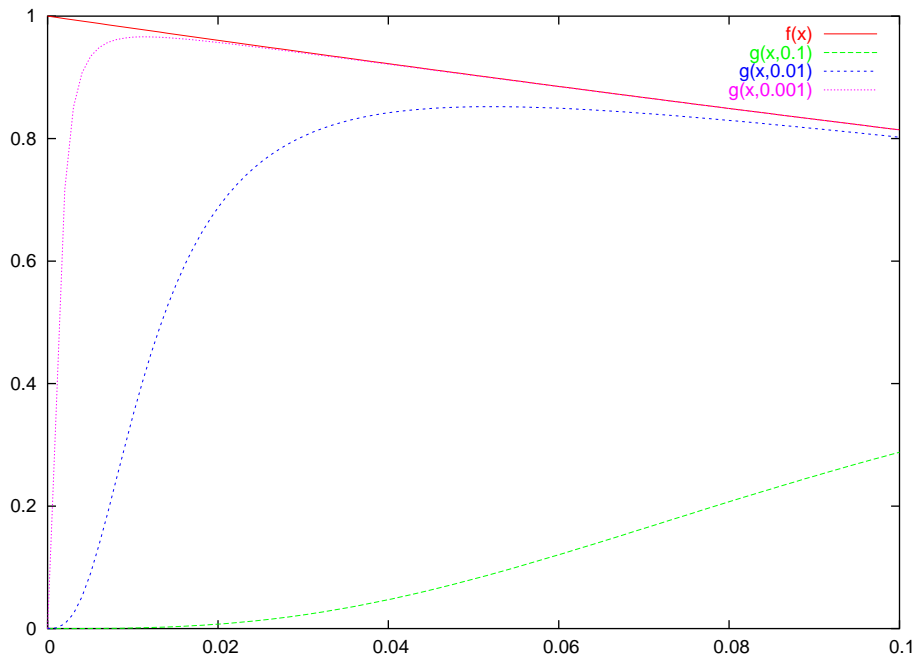


FIG. 4 – La fonction limite $F(x) = (1-x)e^{-x}$ et les fonctions $G(x, a) = (1-x)e^{-x}x^3/[x^2+a^2]^{3/2}$ pour $a = 0.1, 0.01, 0.001$ —Aggrandissement sur l'intervalle $[0, 0.1]$. On voit que la région de non-uniformité est de taille a .

n'est pas uniforme sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Il est, alors, facile à démontrer ce que le dessin indique, à savoir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} G(x, a) \neq \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} G(x, a)$$

car $G(0, a) = 0$ pour toute valeur de $a \neq 0$, tandis que $F(0) = 1$. Mais les dessins indiquent, aussi, que la région "dangereuse" est de taille a —pour $r > a$, les dessins indiquent que $G(x, a)$ est très proche à $F(x)$, lorsque a devient de plus en plus petit. On cherche à rendre cette intuition concrète.

On écrit l'intégrale comme une somme de deux termes

$$\int_0^R \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr = \int_0^a \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr + \int_a^R \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr$$

On note, maintenant, que

$$|(1 - \mu r)e^{-\mu r}| < 1$$

et que

$$\left| \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} \right| \leq |(1 - \mu r)e^{-\mu r}| < 1$$

Ceci implique que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} dr = 0$$

Reste la deuxième intégrale. On va démontrer la convergence uniforme dans l'intervalle $(0, R]$, c.à.d. que, si $0 < a < \delta$, alors

$$\left| \frac{r^3(1 - \mu r)e^{-\mu r}}{[r^2 + a^2]^{3/2}} - (1 - \mu r)e^{-\mu r} \right| < \varepsilon$$

pour tout $r \in (0, R]$ et avec la même valeur pour ε ! On écrit l'expression précédente comme

$$|(1 - \mu r)e^{-\mu r}| \left| \frac{r^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - 1 \right| < \left| \frac{r^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - 1 \right| = \left| \frac{1}{(1 + (\frac{a}{r})^2)^{3/2}} - 1 \right| =$$

pour toute valeur de $r > 0$. Ensuite, on utilise que $a \leq r$ dans l'intervalle en question pour déduire que

$$\left| \frac{1}{(1 + (\frac{a}{r})^2)^{3/2}} - 1 \right| < \varepsilon$$

pour toute valeur de

$$\varepsilon > \delta^2$$

Références

- [1] J. D. Jackson, *Electrodynamique Classique* Dunod (2001), chap. 1