Université de Tours "François Rabelais"
Faculté de Sciences et Techniques
DEUG MIAS 2ème Niveau 2004–2005
Electromagnétisme et Relativité Restreinte

TD1 : Les Outils du Calcul Vectoriel : grad et div

1. Calculer les composantes du gradient des fonctions suivantes en coordonnées cartesiennes :
   - $f(x) = x^2$
   - $f(x, y) = x^2 + y^2$; aussi en coordonnées polaires
   - $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; aussi en coordonnées polaires
   - $f(x, y) = -(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2)^2 - Ax - By$
   - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; aussi en coordonnées sphériques
   - $f(x, y, z) = 1./\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; aussi en coordonnées sphériques

   Trouver les endroits où le module du gradient est nul-que se passe-t-il à ces endroits ? Quelle est la signification de l'annulation d'une composante du gradient ?
2. Les composantes du gradient d'une fonction scalaire se comportent comme les composantes d'un vecteur ; par conséquent on peut imaginer calculer la divergence du gradient des fonctions précédentes, en coordonnées cartesiennes (le cas échéant en coordonnées polaires ou sphériques).
3. On aura besoin de calculer des intégrales sur des surfaces et des volumes. A cette fin on doit connaître l'élément de surface (resp. de volume) correspondant. Trouver, par une construction géométrique, que l'élément de surface d'un disque est $rdrd\phi$; que l'élément de surface d'un cylindre de rayon R est $Rd\phi dz$ et que son élément de volume est $rdrd\phi dz$; et que pour la sphère l'élément de surface est $R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ et l'élément de volume est $r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$.

   OPTIONNEL : Calculer l'élément de volume et l'élément d'aire de la sphère d-dimensionnelle, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq R^2$ (le disque correspond à $d = 2$ et la sphère "habituelle" à $d = 3$).