Université de Tours "François Rabelais"
Faculté de Sciences et Techniques
DEUG MIAS 2ème Niveau 2002–2003
Electromagnétisme et Relativité Restreinte

TD8 : Transformations de Lorentz

1. **OPTIONNEL**. Plan euclidien : Soit le plan euclidien, avec coordonnées cartesiennes (x, y). On cherche les transformations linéaires

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

qui ont la propriété que $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Montrer qu'il y a deux familles, que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Montrer que la première famille correspond à une rotation du système des coordonnées d'un angle θ, tandis que la deuxième à une rotation suivie d'une réflection. On note, finalement, que $\tan\theta = y/x$. Soit, maintenant, l'équation de Laplace

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Montrer que, si $f(x, y)$ est une solution de cette équation, alors $f(x', y')$ satisfait l'équation

$$\nabla'^2 f(x', y') = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 0$$

L'équation est *covariante* sous ces transformations.

2. Plan minkowskien : On considère, maintenant, le *plan minkowskien*, avec coordonnées (x, vt) et l'on cherche les transformations linéaires

$$\begin{pmatrix} x' \\ vt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ vt \end{pmatrix}$$

qui laissent invariante l'expression $x^2 - v^2t^2 = x'^2 - v^2t'^2$. Montrer qu'il y a deux familles, que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix}$$

Ces transformations s'appellent les *transformations de Lorentz.* La première famille est celles des transformations *propres* (déterminant=1) la deuxième est la composition d'une transformation propre et d'une réflection. On appelle le paramètre θ *la rapidité.* Elle est reliée à la vitesse V du système (x', vt') par rapport au système (x, vt) par $\tanh\theta = V/v$. Exprimer les coefficients de la transformation en termes du rapport V/v.

On considère, maintenant, l'équation d'ondes

$$\Box f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Montrer qu'elle est covariante sous ces transformations : si $f(x,t)$ est solution, alors, $f(x', t')$ est solution de

$$\Box' f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} = 0$$

Attention que la vitesse de propagation de cette équation est v, comme pour l'équation originale ! !