

Surfaces minimales

27 novembre 2008

1. Construction de surfaces minimales complètes, plongées, de courbure totale finie.
2. Deux résultats autour des *Saddle Towers* de H. Karcher.
3. Surfaces minimales bordées par deux courbes convexes.

Surfaces minimales dans \mathbb{R}^3

- ▶ point critique de la fonctionnelle aire
- ▶ courbure moyenne $H = 0$
- ▶ graphes minimaux
 $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{xx}(1 + u_y^2) + u_{yy}(1 + u_x^2) - 2u_{xy}u_xu_y = 0$$

- ▶ Représentation de Weierstrass

$\Omega \subset \mathbb{C}$

g méromorphe

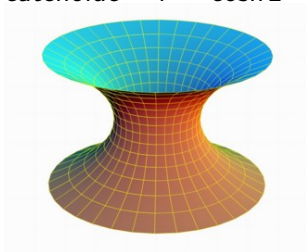
f holomorphe, avec un zéro en chaque pôle de g , de multiplicité double

$$X(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z [(1 - g^2)f dz, i(1 + g^2)f dz, 2fg dz]$$

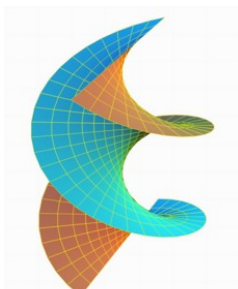
$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion minimale.

Exemples classiques

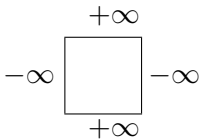
- ▶ caténoïde $r = \cosh z$



- ▶ hélicoïde $x \sin z = y \cos z$



- ▶ surface de Scherk doublement périodique $z = \log \frac{\sin x}{\sin y}$



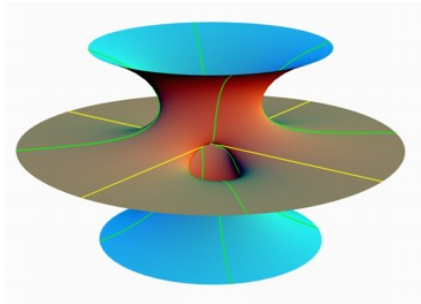
- ▶ surface de Scherk simplement périodique $g = z, f = \frac{1}{z^4+1}$.



1. Construction de surfaces minimales complètes, plongées, de courbure totale finie

Exemples

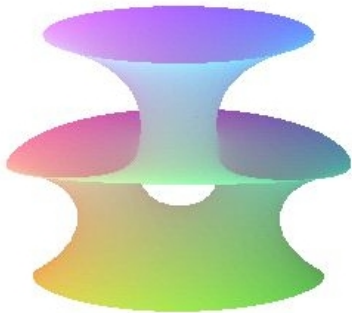
- ▶ caténoïde : genre 0, 2 bouts
- ▶ surface de Costa (1982) : genre 1, 3 bouts

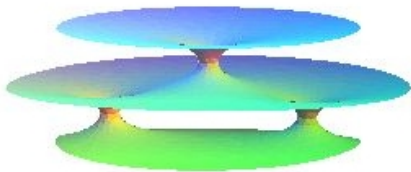


Caractérisation de la caténoïde

- ▶ 2 bouts \Rightarrow caténoïde (Schoen)
- ▶ genre 0 \Rightarrow caténoïde (Lopez Ros)

- ▶ La famille de Costa Hoffman Meeks (genre 1, 3 bouts)

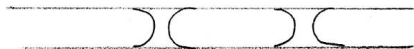
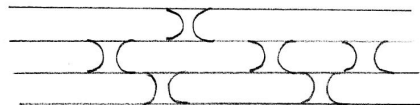




... dessinée par A. Ros



Est ce qu'on peut mettre plus de plans, plus de caténoïdes ?



Configuration

- ▶ $N \geq 1$ nombre de couches de caténoïdes
- ▶ n_k nombre de caténoïdes dans la k -ème couche
- ▶ $p_{k,i} \in \mathbb{C}$ position de la i -ème caténoïde dans la k -ème couche
- ▶ $c_k > 0$ taille des caténoïdes dans la k -ème couche

$$F_{k,i} = \sum_{j \neq i} \frac{2c_k^2}{p_{k,i} - p_{k,j}} - \sum_j \frac{c_k c_{k-1}}{p_{k,i} - p_{k-1,j}} - \sum_j \frac{c_k c_{k+1}}{p_{k,i} - p_{k+1,j}}$$

La configuration est **équilibrée** si $\forall k, i, F_{k,i} = 0$.

La configuration est **non-dégénérée** si la matrice jacobienne $\frac{\partial F_{k,i}}{\partial p_{\ell,j}}$ est de rang maximum.

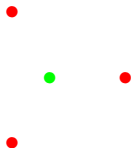
Théorème

Configuration équilibrée, non-dégénérée \rightarrow famille de surfaces minimales $M_t, 0 < t < \varepsilon$.

- ▶ $N + 1$ bouts de type caténoïde
- ▶ tous caténoïdaux de taille $\simeq c_k t$ dans la k -ème couche

Exemples

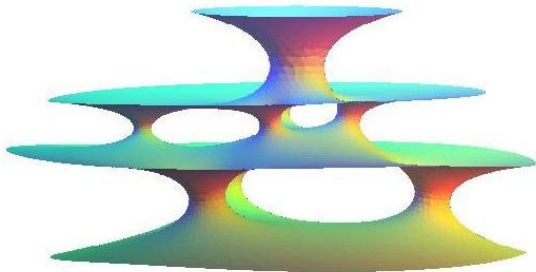
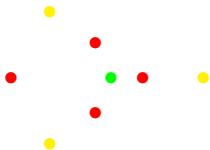
- ▶ $N = 1$
 $n_1 = 1 \rightarrow$ caténoïde.
- ▶ $N = 2$
 $n_1 = 1, n_2 = n \geq 2, p_{1,1} = 0, p_{2,j} \in \mathbb{U}_n.$
 \rightarrow famille de Costa Hoffman Meeks de genre $n - 1$.



► $N = 3$

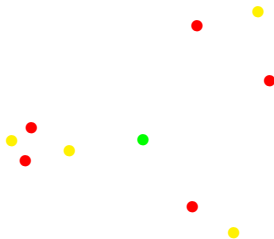
Un exemple de type $(1, 4, 3)$

→ surface minimale de genre 5.



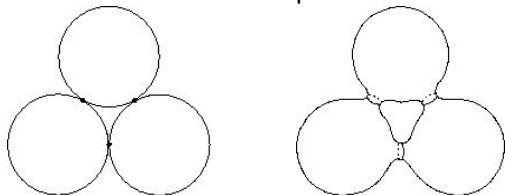
Un exemple de type $(1, 5, 4)$

→ surface minimale de genre 7, sans symétries.



Cadre de la construction

- ▶ Représentation de Weierstrass globale Σ, g, ω .
- ▶ Surfaces de Riemann à points doubles



- ▶ On résout le problème des périodes par Fonctions Implicites.

2. Deux résultats autour des *Saddle Towers* de H. Karcher

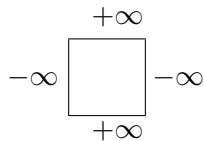
Surface minimale conjuguée M^*

$\Omega \subset \mathbb{C}$ simplement connexe

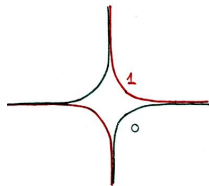
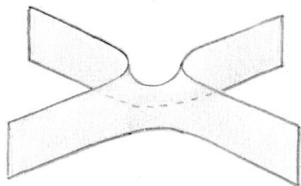
g, f représentation de Weierstrass de M

g, if représentation de Weierstrass de M^* .

Surfaces de Scherk

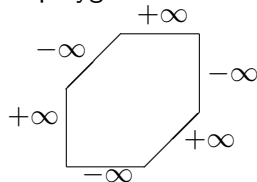


$$z = \log \frac{\sin x}{\sin y}$$

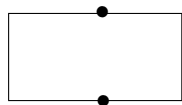


Saddle Towers (H. Karcher)

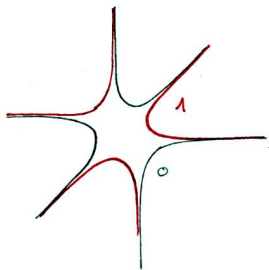
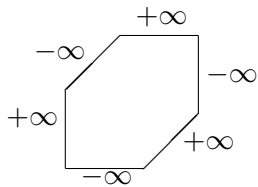
Ω polygone convexe à $2k$ cotés de longueur 1 ($k \geq 3$).



Ω est dit **special** si c'est un parallélogramme avec deux cotés de longueur $k - 1$ et les deux autres de longueur 1.

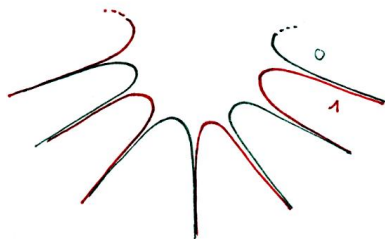
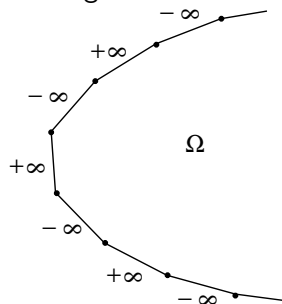


Jenkins Serrin : si Ω est non-special, alors il existe u solution de l'équation des surfaces minimales sur Ω avec ces données infinies au bord.



Saddle Towers avec une infinité de bouts

Ω domaine polygonal convexe non borné avec une infinité de cotés de longueur 1.



Théorème (avec L. Mazet et M. Rodriguez)

Il existe $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation des surfaces minimales avec ces données infinies au bord.

Unicité des *Saddle Towers*

Théorème (avec J. Perez)

*Les seules surfaces minimales complètes, plongées, de courbure totale finie et de genre 0 dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ sont l'hélicoïde, les surfaces de Scherk et les *Saddle Towers*.*

Démonstration de l'unicité des Saddle towers

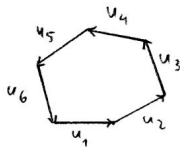
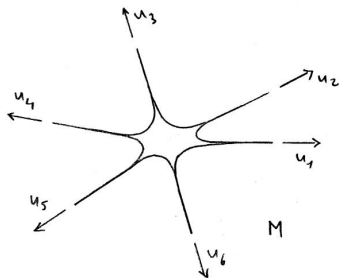
$\mathcal{S} = \{ \text{candidats à } 2k \text{ bouts} \}$

$\mathcal{S}_0 = \{ \text{Saddle towers à } 2k \text{ bouts} \}$

$\mathcal{P} = \{ \text{polygones convexes non-speciaux à } 2k \text{ cotés de longueur } 1 \}$

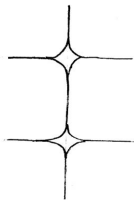
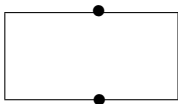
Polygone des flux

$F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}$



Soit $M_0 \in \mathcal{S}$ un candidat.

- ▶ F est ouverte.
 \Rightarrow on peut déformer M_0 .
- ▶ F est propre.
 \Rightarrow on peut atteindre tous les polygones non-speciaux en déformant M_0 .
- ▶ Si $F(M)$ est proche d'un polygone special alors M est une Saddle Tower



- ▶ \mathcal{S}_0 est une composante connexe de \mathcal{S} .

3. Surfaces minimales bordées par deux courbes convexes



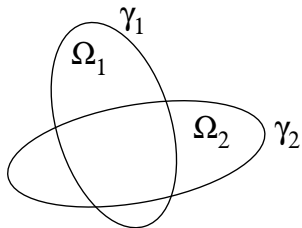
Théorème (Shiffman 1950)

*Si M est un **anneau** minimal bordé par deux courbes convexes dans des plans horizontaux, alors M coupe les plans horizontaux intermédiaires selon des courbes convexes.*



Conjecture (Meeks)

Deux courbes convexes dans des plans horizontaux ne peuvent pas border de surface minimale compacte de genre ≥ 1 .



Théorème

M_n suite de surfaces minimales bordées par γ_1 et $\gamma_2 + (0, 0, t_n)$, avec $t_n \rightarrow 0$, de genre $k \geq 1$ fixé. Alors quand $n \rightarrow \infty$, la courbure se concentre en $k + 1$ points $p_1, \dots, p_{k+1} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. De plus, la configuration p_1, \dots, p_{k+1} est équilibrée.

Fonction de Green de Ω_i : $G_{i,p}(z) = \log |z - p| + H_{i,p}(z)$.

$$F_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{p_i - p_j} + \sum_j \frac{\partial H_{1,p_j}}{\partial z}(p_i) + \frac{\partial H_{2,p_j}}{\partial z}(p_i).$$

Théorème

Si $k = 1$, il n'y a pas de configuration équilibrée.

Théorème

Si γ_1 et γ_2 sont symétriques par rapport à une même droite, il n'y a pas de configuration équilibrée.

Théorème (L. Mazet)

Si $\gamma_1 = \gamma_2$, il n'y a pas de configuration équilibrée.

Corollaire

Sous l'une de ces hypothèses, il existe $\varepsilon = \varepsilon(k, \gamma_1, \gamma_2) > 0$ tel que si $t < \varepsilon$, γ_1 et $\gamma_2 + (0, 0, t)$ ne bordent pas de surface minimale de genre k .